SINCE ET GARRABOS

SCIENCES PHYSIQUES

CLASSE DE 1re

A LA MÊME LIBRAIRIE

DES MÊMES AUTEURS

Problèmes de Sciences physiques. — Trois vol. 14/22 cm :

Classes de Quatrième et Troisième (et B. E. P. C.) . . . . . 9. — F
Classe de Seconde, 2e édition . . . . . 10. — F
Classes de Mathématiques élémentaires, Mathématiques-Technique, Sciences expérimentales, 6e édition . . . . . 15. — F

Comment on résout le Problème de Physique. *Méthode destinée aux candidats aux examens, avec de nombreux exemples,* par FAVRE et GAUTIER. — Vol. 14/22 cm . . . . . 8. — F

On vend aussi séparément :

I. — *Statique, Chaleur* . . . . . 2,50 F
III. — *Dynamique expérimentale, Énergie, Mouvements vibratoires* . 4. — F

Comment on résout le Problème de Chimie. *Méthode destinée aux candidats aux examens, avec de nombreux exemples,* par FAVRE et GAUTIER. — Vol. 14/22 cm . . . . . 2,50 F

Annales du Baccalauréat. — Vol. 12/18 cm :

Fascicule 3. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (examen d'entrée en classes terminales) . . . . . 3. — F
Fascicule 4. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (séries *Mathématiques élémentaires* et *Mathématiques et Technique*). 4. — F
Fascicule 5. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (séries *Philosophie* et *Sciences expérimentales*) . . . . . 3. — F

Annales corrigées du Baccalauréat. — Vol. 12/18 cm :

Fascicule 3. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (examen d'entrée en classes terminales) . . . . . 4. — F
Fascicule 4. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (séries *Mathématiques* et *Mathématiques et Technique*) . . . . . 4. — F
Fascicule 5. SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES (séries *Philosophie* et *Sciences expérimentales*) . . . . . 4. — F

PROBLÈMES

DE

SCIENCES PHYSIQUES

à l'usage de la classe

de

Première

PAR

L. SINCE & **L. GARRABOS**

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
PROVISEUR DU LYCÉE BELLEVUE
A TOULOUSE

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ
PROFESSEUR AU LYCÉE LAKANAL
A SCEAUX

QUATRIÈME ÉDITION

PARIS

LIBRAIRIE VUIBERT

BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 63

1966

Tous droits de reproduction, de traduction
et d'adaptation réservés pour tous pays.
© *Librairie Vuibert* 1966.

AVANT-PROPOS

Le problème de physique de la classe de Première est conçu en vue d'atteindre un double résultat : en premier lieu, faire acquérir par l'élève une bonne compréhension des phénomènes fondamentaux de l'optique géométrique et de l'électricité; en second lieu développer chez ceux d'entre eux qui se destinent aux études scientifiques, les réflexes de raisonnement et la rapidité d'exécution des calculs qui leur seront indispensables quand ils aborderont les questions délicates dans lesquelles le raisonnement et le calcul tiendront une plus grande place.

Ces résultats seront obtenus en ne proposant qu'un nombre restreint de difficultés et en provoquant la répétition fréquente de calculs qui ne doivent mettre en œuvre que les règles les plus simples de l'algèbre, les théorèmes les plus connus de la géométrie et les formules les plus immédiates de la trigonométrie.

L'élève qui aura travaillé correctement devra être capable en optique de voir du premier coup d'œil le chemin suivi par la lumière dans les milieux qu'elle traverse et de trouver avec sûreté, sans hésitation ni complication, la position et la grandeur des images dont les objets lui sont donnés. Il devra donc être familiarisé notamment avec la construction des images et l'application des formules de position et de grandissement.

Si les procédés de construction des images offrent peu de variété il n'en est pas de même des formules. Notre expérience nous a montré que sur ce point, au niveau de la classe de Première, les meilleures sont les plus simples. C'est pourquoi, en ce qui concerne les miroirs et les lentilles, nous avons renoncé dans ce livre aux formules qui utilisent les segments orientés.

Bonnes pour les élèves dont les dispositions scientifiques

sont déjà éprouvées et pour ceux dont l'esprit est davantage tourné vers l'abstraction, ces formules sont pour l'élève moyen l'occasion d'accumuler les fautes de signes dans les calculs; en outre elles rebutent et découragent les élèves faibles.

Les figures qui accompagnent les calculs ont été multipliées. Nous avons donné non seulement celles que le texte imposait de construire mais aussi toutes celles qui permettent de rendre plus claire la solution.

C'est par la reproduction fréquente mais fidèle de ces figures, au point qu'elle devienne automatique, que l'élève pourra mesurer les progrès qu'il aura accomplis en optique.

En ce qui concerne l'électricité, la résolution des problèmes exige la connaissance parfaite des définitions des grandeurs fondamentales et des lois élémentaires sur lesquelles sont basés les calculs. Cherchant à être efficaces plus qu'à être concis, nous avons à chaque occasion rappelé ces définitions et ces lois.

En les aidant dans leur travail, nous souhaitons que les élèves indécis sur leur vocation n'envisagent pas avec effroi les études scientifiques mais se persuadent au contraire qu'elles sont accessibles à tous ceux qui, moyennement doués, veulent faire l'effort qu'elles requièrent.

AVERTISSEMENT DE LA 3e ÉDITION

Dans cette nouvelle édition nous avons supprimé deux chapitres des éditions précédentes qui portaient sur des questions ne figurant plus aux programmes actuels de la classe de Première.

Par contre, nous avons ajouté un chapitre nouveau sur l'induction électromagnétique et augmenté le nombre des problèmes de chimie.

CHAPITRE I

Réflexion de la lumière. Miroirs plans.

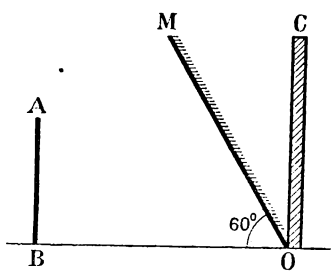
1. — Miroir plan : image virtuelle d'un objet réel.

Une règle verticale, AB, de 1 m de longueur, est placée à 2 m d'une cloison OC contre laquelle est adossé un miroir OM, qui penche de 60° du côté de AB et qui s'appuie sur l'arête O de la cloison et du plancher.

1° Quelle est la pente de l'image du plancher, vu par réflexion dans le miroir ?

2° Quelle est l'altitude des images des points A et B par rapport au plan horizontal ?

(Clermont.)



1° L'image du plancher, vu par réflexion dans le miroir, est le plan symétrique du plancher par rapport au miroir.

La trace du plancher dans un plan perpendiculaire à l'arête O est la droite OB telle que $\widehat{BOM} = \alpha$, α étant l'angle donné.

La trace de son image fournie par le miroir plan est la droite OB′ telle que $\widehat{MOB'} = \widehat{BOM} = \alpha$.

La pente de l'image du plancher est l'angle β supplément de l'angle $\widehat{BOB'} = 2\alpha$.

$$\beta = \pi - 2\alpha.$$

Numériquement : $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\beta = \pi - 2\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\beta = 60^\circ.$$

2° La règle AB a pour image la droite A′B′, symétrique de AB par rapport au miroir.

Le point B′ se projette en *b* sur le plancher. Son altitude est représentée par le segment de droite B′*b*.

Dans le triangle B′O*b*, nous avons la relation

$$B'b = OB' \sin \beta = OB \sin (\pi - 2\alpha),$$
$$B'b = OB \sin 2\alpha.$$

Le point A′ se projette en *a* sur le plancher. Son altitude est représentée par le segment de droite A′*a*.

Menons par B′ l'horizontale B′H. Nous pouvons écrire

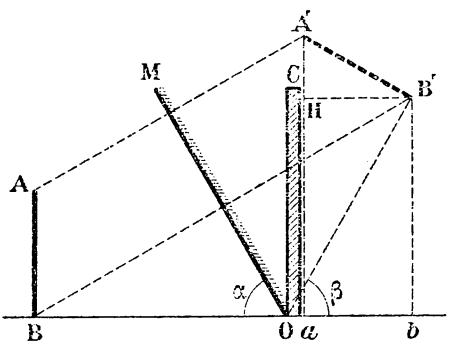
$$A'a = A'H + Ha,$$
$$Ha = B'b = OB \sin 2\alpha,$$
$$A'H = A'B' \cos \widehat{HA'B'}.$$

$\widehat{HA'B'}$ et $\widehat{B'Ob}$ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires (A′*a* perpendiculaire à O*b*, A′B′ perpendiculaire à OB′).

$$A'H = AB \cos \beta = AB \cos (\pi - 2\alpha),$$
$$A'H = -AB \cos 2\alpha.$$

D'où

$$A'a = OB \sin 2\alpha - AB \cos 2\alpha.$$



Application numérique : $\alpha = \frac{\pi}{3}$, OB = 2 m, AB = 1 m.

$$B'b = 2 \sin \frac{2\pi}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ m},$$
$$B'b = \mathbf{1{,}732\ m.}$$

$$A'a = 2 \times \sin \frac{2\pi}{3} - 1 \times \cos \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{1}{2},$$
$$A'a = \mathbf{2{,}232\ m.}$$

2. — Miroir plan : image réelle d'un objet virtuel. Miroir plan tournant.

1° Une lentille convergente donne d'une source ponctuelle S une image réelle S'.

On intercepte les rayons qui vont converger en S' par un miroir à 45° qui coupe l'axe optique SS' en un point O situé à 1 m de S'. Où doit-on placer un écran E parallèle à SS' pour recueillir la nouvelle image S'' de S' ?

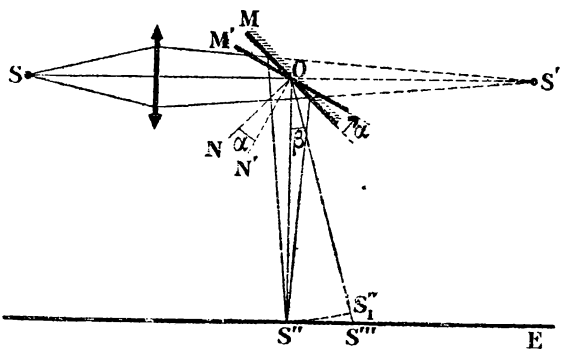
2° Quel est le déplacement de l'image S'' sur l'écran pour une rotation de 1 degré du miroir autour d'un axe passant par O et parallèle à l'écran E ?

3° Si le miroir fait 500 tours à la seconde, quelle est la vitesse de déplacement de l'image S'' sur l'écran ?

4° On suppose alors que la source S devienne intermittente et envoie 100 000 éclairs par seconde. On observe sur l'écran, le miroir tournant à 500 tours par seconde, une série de taches lumineuses équidistantes. Calculer cette équidistance.

(*Bordeaux.*)

1° L'image réelle S' joue, pour le miroir plan, le rôle d'objet virtuel. Le miroir en donne une image réelle, S'', symétrique de S' par



rapport à son plan. S'' est donc située sur la droite OS'' symétrique de OS' par rapport au miroir, donc perpendiculaire à l'axe SS' et à la distance OS'' = OS'.

L'écran doit être placé parallèlement à l'axe, à 1 mètre de ce dernier.

2° Soit ON la normale au miroir. La droite OS'' peut être considérée comme le rayon réfléchi correspondant au rayon incident SO. Lorsque le miroir tourne d'un angle α autour de l'axe O, dans le sens indiqué sur la figure, par exemple, l'angle d'incidence augmente de α; l'angle de réflexion augmente également de α. L'angle SOS'' croît donc de $\beta = 2\alpha$.

Par ailleurs, la distance OS'' reste constante et égale à OS' pendant la rotation.

L'image S″ se déplace donc sur un cercle de rayon OS″ et décrit un arc $S''S''_1$ tel que

$$\widehat{S''S''_1} = OS'' \times \beta = OS'' \times 2\alpha.$$

L'angle β étant très petit, le point S''_1 se confond sensiblement avec le point S‴ situé sur la tangente au cercle, c'est-à-dire sur l'écran.

L'image S″ décrit donc sensiblement, pendant la rotation, le segment S″S‴ tel que

$$S''S''' = OS'' \times 2\alpha.$$

Application numérique : $OS'' = 1$ m ou 100 cm , $\alpha = 1^\circ$ ou $\frac{\pi}{180}$ radian.

$$S''S''' = 100 \times 2 \times \frac{\pi}{180},$$

$$\mathbf{S''S''' = 3{,}5\ cm.}$$

3° Lorsque le miroir effectue un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe O, l'image S″ se déplace sur l'écran d'un mouvement uniforme et reste suffisamment nette si la largeur de l'écran est telle que l'angle β reste petit. La vitesse de rotation étant n tours par seconde, le miroir tourne d'un angle $\alpha = 2\pi n$ radians par seconde et l'image S″ subit pendant ce temps un déplacement

$$v = OS'' \times 2\alpha = OS'' \times 4\pi n.$$

v représente la vitesse cherchée.

Numériquement : $n = 500$ tr/s, $OS'' = 1$ m.

$$v = 1 \times 4\pi \times 500 = 2\,000\,\pi,$$

$$v = 6\,280 \text{ m/s},$$

ou, en km/h,

$$v = \frac{6\,280}{1\,000} \times 3\,600,$$

$$\mathbf{v = 22\,600\ km/h.}$$

4° La source émet N éclairs par seconde. Entre deux éclairs, il s'écoule donc $\frac{1}{N}$ s. Pendant ce temps, l'image S″ s'est déplacée de la distance

$$a = v \times \frac{1}{N}.$$

Numériquement : $N = 100\,000$, $v = 6\,280$ m/s.

$$a = \frac{6\,280}{100\,000} = 0{,}062\,8 \text{ mètre},$$

$$\mathbf{a = 6{,}28\ cm.}$$

3. — Miroirs plans inclinés l'un sur l'autre.

Deux miroirs plans, M_1, M_2, forment un angle dièdre, D, de 60 degrés, les faces réfléchissantes étant toutes deux tournées vers l'intérieur du dièdre. A l'intérieur de ce dièdre est placé un point lumineux, A, tel que le plan défini par ce point et l'arête du dièdre D fasse avec le miroir M_1 un angle de 15 degrés.

1° Déterminer les images données du point A par le système des deux miroirs.

2° Déterminer en grandeur et sens la déviation subie par un rayon lumineux issu de A dans le plan mené par ce point perpendiculairement à l'arête du dièdre D et réfléchi d'abord sur M_1, ensuite sur M_2; montrer que cette déviation est indépendante du rayon choisi.

(Toulouse.)

1° Le système de deux miroirs inclinés donne deux séries d'images virtuelles du point A, toutes situées sur le cercle de centre O et de rayon OA, dans le plan perpendiculaire à l'arête du dièdre passant par A (fig. 1).

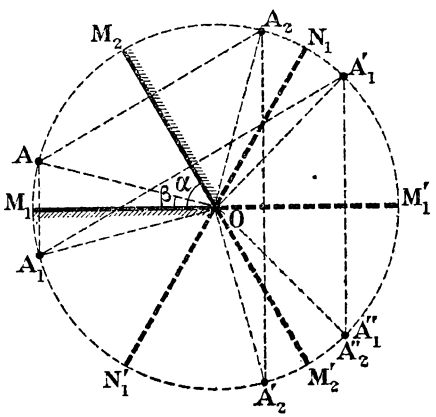


Fig. 1.

a) Le miroir M_1 donne de A ($\widehat{M_1OA} = \beta$) une image virtuelle A_1, symétrique de A par rapport à M_1. A_1 joue le rôle d'objet réel pour le miroir M_2, qui en donne une image virtuelle, A'_1, symétrique de A_1 par rapport à M_2. A'_1 joue le rôle d'objet réel pour le miroir M_1, qui en donne une image virtuelle, A''_1. La première série d'images se réduit aux trois précédentes. En effet, le point A''_1, par lequel passent tous les rayons réfléchis pour la seconde fois par le miroir M_1, est dans l'angle $M'_1OM'_2$. Aucun de ces rayons réfléchis ne peut rencontrer le miroir M_2.

Nous avons tracé la marche d'un rayon lumineux issu de A et réfléchi successivement par M_1, puis par M_2 et de nouveau par M_1 (fig. 2).

b) Le miroir M_2 donne de A (fig. 1) une image virtuelle, A_2, qui joue le rôle d'objet réel pour le miroir M_1. Celui-ci en donne une image virtuelle, A'_2, qui joue à son tour le rôle d'objet réel pour le miroir M_2. Celui-ci en donne une image virtuelle, A''_2, qui se trouve, comme A''_1, dans l'angle $M'_1OM'_2$. La seconde série d'images se réduit à trois comme la première.

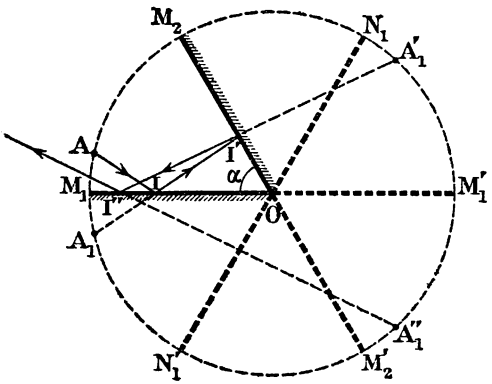


Fig. 2.

Remarquons que l'angle des deux miroirs $\left(\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\right)$ est une partie aliquote de 2π. La figure montre que, par raison de symétrie, l'image A''_2 se confond avec l'image A''_1.

Sur cette figure le plan $N_1ON'_1$ formé par les images de M_1 par rapport à M_2 et de M_2 par rapport à M_1 est un plan de symétrie du système.

Au total, nous obtenons cinq images du point A :

A_2, A'_1, A''_1 (confondue avec A''_2), A'_2 et A_1, situées dans des plans contenant l'arête O et formant avec celui du miroir M_1 les angles suivants :

$$\widehat{A_2OM_1} = 2\alpha - \beta = 2 \times 60 - 15 = 105^\circ,$$
$$\widehat{A'_1OM_1} = 2\alpha + \beta = 2 \times 60 + 15 = 135^\circ,$$
$$\widehat{A''_1OM_1} = 2\pi - (2\alpha + \beta) = 360 - (2 \times 60 + 15) = 225^\circ,$$
$$\widehat{A'_2OM_1} = 2\pi - (2\alpha - \beta) = 360 - (2 \times 60 - 15) = 255^\circ,$$
$$\widehat{A_1OM_1} = 2\pi - \beta = 360 - 15 = 345^\circ.$$

2° Le rayon incident AI se réfléchit successivement en I sur le miroir M_1 puis en I′ sur le miroir M_2 (fig. 3). La déviation subie par le rayon lumineux après ces deux réflexions est représentée par l'angle IHR = δ. L'angle extérieur IHR du triangle HI′I est égal à la somme des angles qui ne lui sont pas adjacents :

$$\widehat{IHR} = \delta = 2i + 2i' = 2(i + i').$$

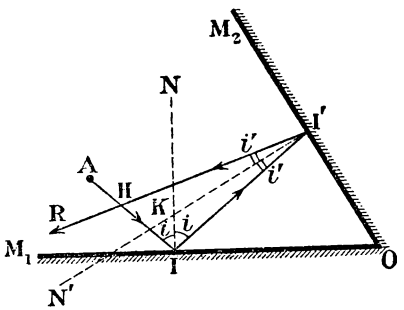


Fig. 3.

L'angle extérieur IKN′ du triangle KI′I est égal à l'angle α (côtés perpendiculaires). Il est de plus égal à la somme des angles qui ne lui sont pas adjacents :

$$\widehat{IKN'} = \alpha = i + i'.$$

Il en résulte que

$$\delta = 2\alpha.$$

La déviation δ est égale à deux fois l'angle plan du dièdre, quel que soit le rayon choisi.

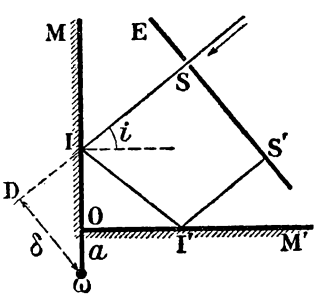
4. — Système de miroirs angulaires tournant autour d'un axe.

Deux miroirs plans, OM, OM′, se coupent en O à angle droit.

Un écran, E, percé d'une petite ouverture, S, laisse passer un rayon lumineux fixe, SI, qui lui est perpendiculaire et qui, après réflexion sur chacun des miroirs, vient marquer une tache lumineuse, S′, sur l'écran.

On demande

1° ce que devient la distance SS′ quand les miroirs tournent ensemble autour du point O, dans les limites où le rayon reste deux fois réfléchi ;



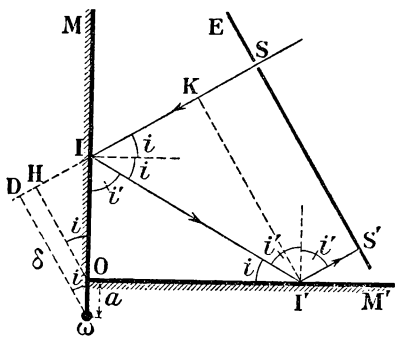
2° ce que devient cette même distance SS′ quand les miroirs tournent autour du point ω situé sur le prolongement de MO, à une distance a du point O et à une distance δ de la droite SI.

Évaluer SS′ pour les valeurs $a = 2$ cm, $\delta = 30$ cm, $i = 60°$.

(Clermont.)

1° Le rayon incident SI se réfléchit successivement en I sur le miroir M, puis en I′ sur le miroir M′.

La première réflexion lui fait subir une déviation égale à $\pi - 2i$ dans le sens des aiguilles d'une montre; la seconde une déviation



égale à $\pi - 2i'$ dans le même sens. Le rayon émergent I′S′ fait donc avec le rayon incident SI l'angle

$$\alpha = (\pi - 2i) + (\pi - 2i') = 2\pi - 2\,(i + i').$$

Mais, dans le triangle IOI′, nous avons la relation

$$i + i' = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\alpha = 2\pi - 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Les rayons SI et I′S′ sont parallèles.

Remarquons que pendant la rotation, la distance OH du point O au rayon SI reste constante. Évaluons la distance SS′ en fonction de OH.

Si nous menons par le point I′ la parallèle I′K à SS′, nous avons, dans le triangle II′K, la relation

$$\mathrm{I'K} = \mathrm{II'} \sin 2i.$$

En considérant le triangle IOI', nous pouvons écrire

$$II' = \frac{IO}{\sin i},$$

et, en considérant le triangle IOH,

$$IO = \frac{OH}{\cos i};$$

d'où $SS' = I'K = \frac{OH}{\cos i \sin i} \sin 2i$ et, en vertu de la relation $\sin 2i = 2 \sin i \cos i$,

$$SS' = 2\,OH.$$

Pendant la rotation des deux miroirs, la distance SS' reste constante et égale à 2 OH.

2° Lorsque le système de deux miroirs tourne autour du point ω la distance $\delta = O\omega$ reste constante, mais la distance $SS' = 2\,OH$ varie. En effet, nous avons vu que

$$OH = IO \cos i.$$

Or $IO = I\omega - O\omega = I\omega - a.$

Dans le triangle $I\omega D$, nous avons la relation $I\omega = \frac{\delta}{\cos i}$;

d'où $$IO = \frac{\delta}{\cos i} - a$$

et $$OH = \left(\frac{\delta}{\cos i} - a\right) \cos i = \delta - a \cos i.$$

La distance $SS' = 2\,OH$ est donc

$$SS' = 2(\delta - a \cos i).$$

Nous voyons que cette distance varie pendant la rotation des deux miroirs autour du point ω.

Application numérique : $\delta = 30$ cm, $a = 2$ cm, $\cos i = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

$$SS' = 2\left(30 - 2 \times \frac{1}{2}\right),$$

$$\mathbf{SS' = 58\ cm.}$$

CHAPITRE II

Réfraction de la lumière.

5. — Application de la construction d'Huygens.

Les rayons rouges provenant du Soleil couchant viennent frapper la surface d'une eau tranquille sous une incidence que l'on pourra supposer égale à 90°.

1° On demande de construire géométriquement la direction des rayons réfractés de ces rayons, sachant que l'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air est $n = \frac{4}{3}$.

Déterminer la valeur de l'angle de réfraction.

2° Un faisceau étroit de rayons solaires pénètre, après réfraction, dans l'œil, O d'un poisson situé à 1,50 m sur la verticale d'un point A de la surface de l'eau.

Quelle est, pour le poisson, la direction apparente du Soleil couchant ? On définira cette direction par son angle α avec la verticale.

3° Cette direction coupe la surface de l'eau en un point I ; on demande de construire géométriquement la droite OI et de trouver une valeur approchée de AI, en prenant $\alpha = 45°$.

4° Existe-t-il une position du Soleil pour laquelle sa direction apparente, pour le poisson, coïncide avec sa direction réelle ?

N.-B. — On trouve dans les tables que l'angle dont le sinus est égal à 0,75 est 48° 35′.

(Nancy.)

1° Soit un rayon rouge SI, frappant la surface *xy* de l'eau sous l'incidence $i = 90°$. Le rayon réfracté correspondant IR est dans le plan d'incidence, que nous prenons comme plan de figure. L'angle de réfraction r a la valeur λ donnée par la formule

$$\sin 90° = n \sin \lambda,$$

d'où

$$\sin \lambda = \frac{1}{n}.$$

λ est l'angle limite correspondant aux deux milieux air-eau. Pour déterminer géométriquement la direction du rayon réfracté IR nous utiliserons la construction d'Huygens (fig. 1).

Dans le plan d'incidence, nous traçons deux arcs de cercle de centre I et de rayons égaux respectivement à 1 et à n (échelle 1 cm = 1 unité). Le prolongement du rayon incident rencontre le cercle de rayon unité en un point B. Nous traçons en B la perpendiculaire sur xy, qui rencontre le cercle de rayon n en un point C. La droite IC représente le rayon réfracté.

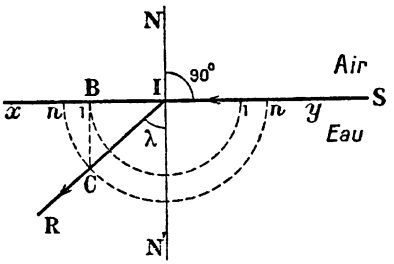


Fig. 1.

En effet, dans le triangle BCI, nous avons

$$\sin \text{BCI} = \frac{\text{IB}}{\text{IC}} = \frac{1}{n}$$

et, par suite, $\widehat{\text{BCI}} = \lambda$.

L'angle CIN', égal à l'angle BCI, est égal à λ. La droite IC représente donc bien le rayon réfracté IR.

Numériquement : $\sin \lambda = 0{,}75$, $\lambda = 48^\circ 35'$.

2° L'œil du poisson, situé sur la verticale du point A à la distance $\text{AO} = d$ de la surface, reçoit le faisceau étroit de rayons formant avec la normale, IN, l'angle limite λ (fig. 2). Le poisson aperçoit donc le

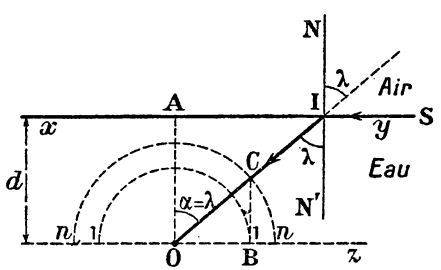


Fig. 2.

Soleil dans la direction OI, qui forme avec la verticale l'angle $\alpha = \lambda$.

Cet angle $\alpha = \lambda$ définit la direction apparente du Soleil couchant pour le poisson.

3° La droite OI forme, avec la verticale OA, un angle égal à l'angle limite λ. Nous pouvons déterminer géométriquement la droite OI en utilisant la construction précédente.

Nous traçons la parallèle Oz à *xy*. Du point O comme centre, avec des ouvertures de compas égales à 1 et *n*, nous traçons deux arcs de cercle. Du point B, nous élevons la perpendiculaire sur Oz, qui rencontre le cercle en un point C. La droite OC forme avec la verticale l'angle λ. Elle coupe la droite *xy* au point I.

Si $\widehat{AOI} = 45°$, le triangle AOI est isocèle :

$$AI = AO = d,$$
$$\mathbf{AI = 1{,}50\ m.}$$

4° Lorsque le Soleil est au zénith, c'est-à-dire sur la verticale OA, le rayon incident SI pénètre dans l'eau sans subir de déviation. Le point I se confond avec le point A et la droite SI avec la droite OA. La direction apparente du Soleil coïncide donc, pour le poisson, avec sa direction réelle.

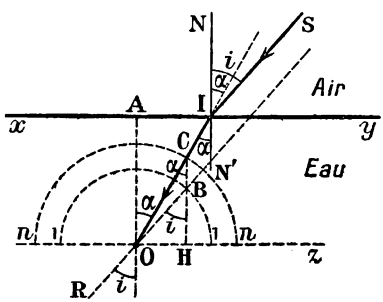


Fig. 3.

Nous pouvons retrouver ce résultat géométriquement. Construisons, en effet, la droite OI dans le cas général (fig. 3) où le rayon incident SI arrive à la surface de l'eau sous une incidence *i* quelconque.

Du point O comme centre, nous traçons deux arcs de cercle de rayons égaux à 1 et à *n*. La droite RO, qui fait avec la verticale AO l'angle *i*, rencontre le cercle de rayon unité au point B. La perpendiculaire abaissée de B sur Oz rencontre le cercle de rayon *n* au point C. La droite OC rencontre la surface *xy* au point I. La droite OI est le rayon réfracté correspondant au rayon incident SI qui frappe la surface de l'eau sous l'incidence *i*. En effet, en considérant les triangles OHB et OHC nous pouvons écrire

$$OH = OB \sin i = OC \sin \alpha,$$

ou

$$\sin i = n \sin \alpha.$$

C'est la deuxième loi de la réfraction.

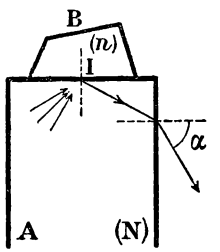
Pour que la direction apparente du Soleil coïncide, pour le poisson, avec sa direction réelle, il faut que les points O, B et C soient sur une même droite. Ce résultat n'est obtenu que lorsque le Soleil est sur la droite OA, c'est-à-dire lorsqu'il est au zénith.

6. — Mesure d'un indice. Principe de l'appareil Pullfrich.

Pour mesurer l'indice d'un verre, on emploie la méthode suivante. Sur un cylindre droit, A, de verre d'indice connu $N = \sqrt{3}$, on place un morceau, B, du verre à étudier d'indice $n < N$. B a une face plane, que l'on pose sur A.

1° On envoie à l'intérieur de A de la lumière, qui vient converger au point I de la surface de contact entre A et B. Cette lumière arrive sous toutes les incidences.

Montrer que, s'il y a contact entre A et B, une partie de la lumière est réfléchie totalement et émerge latéralement du cylindre A. On mesure l'angle d'émergence limite α, qui est trouvé égal à 60°. Calculer l'indice n. Montrer qu'il y a une valeur limite de cet indice au-delà de laquelle on ne peut plus le mesurer.



2° Pour établir le contact entre les verres A et B, on interpose entre A et B une goutte de liquide, qui forme une lame à faces parallèles. Montrer que, si cet indice est supérieur à N, le phénomène précédent n'est pas modifié.

(Sénégal.)

1° *Étude qualitative du phénomène.*

Examinons la marche des rayons dans un plan vertical contenant l'axe du cylindre. La lumière passe du cylindre de verre A d'indice N par rapport à l'air dans le morceau du verre à étudier, B, d'indice n par rapport à l'air.

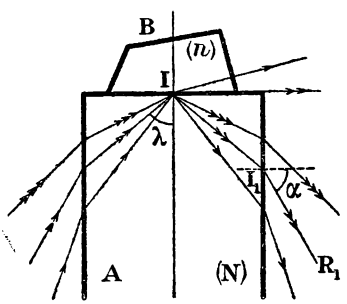


Fig. 1.

Si l'on a $n < N$, la deuxième loi de la réfraction, $N \sin i = n \sin r$, exige que l'on ait $r > i$.

S'il arrive au point I (fig. 1) un faisceau de rayons convergents sous toutes les incidences comprises entre 0° et 90°, ceux de ces rayons dont l'incidence sera faible subiront à la fois la réfraction et la réflexion.

Pour une incidence convenable, $i = \lambda$, l'angle de réfraction sera égal à 90° et il y aura encore réflexion.

λ, angle limite correspondant aux deux milieux transparents, est donné par l'expression

$$N \sin \lambda = n \sin 90° = n.$$

Pour une incidence supérieure à λ la deuxième loi de la réfraction, $N \sin i = n \sin r$, ne peut être satisfaite. La condition $r > i$ entraînerait pour $i > \lambda$, $r > 90^o$, ce qui est impossible. Le rayon incident subira alors la réflexion totale.

Il y aura donc dans le faisceau de rayons réfléchis en I ceux dont l'angle de réflexion sera inférieur à λ, qui ne transporteront qu'une partie de la lumière incidente, et ceux dont l'angle de réflexion sera supérieur à λ, qui transporteront toute la lumière incidente.

A leur arrivée sur la génératrice de sortie du cylindre, ces rayons, passant dans l'air, vont se réfracter en s'écartant de la normale.

Ils présenteront deux régions : une, inférieure, de faible luminosité, correspondant à la réflexion partielle en I, une, supérieure, de forte luminosité, correspondant à la réflexion totale en I.

La limite entre ces deux régions, correspondant à l'angle λ en I, est donnée par le rayon I_1R_1 émergeant sous l'angle α.

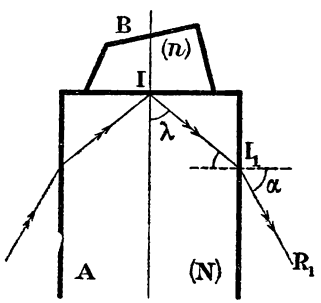


Fig. 2.

Calcul de l'indice n.

Désignons par n_0, n_1 et N_1 les indices absolus de l'air, du verre B et du verre A.

Au point I_1 (fig. 2), la deuxième loi de la réfraction donne

$$N_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) = n_0 \sin \alpha$$

ou $$N_1 \cos \lambda = n_0 \sin \alpha. \qquad (1)$$

Au point I, pour l'incidence λ, cette même loi donne

$$N_1 \sin \lambda = n_1 \sin 90^o \quad \text{ou} \quad N_1 \sin \lambda = n_1. \qquad (2)$$

Élevant au carré et additionnant (1) et (2) nous obtenons la relation entre les indices :

$$N_1^2 = n_0^2 \sin^2 \alpha + n_1^2.$$

Nous en tirons la valeur de n_1^2 :

$$n_1^2 = N_1^2 - n_0^2 \sin^2 \alpha. \qquad (3)$$

Cette relation établie dans le cas des indices absolus reste valable dans le cas des indices relatifs à l'air.

En désignant par c, v_0, v_1 et v les vitesses de la lumière dans le vide, l'air, le verre B et le verre A, les indices absolus de l'air, de B et de A ont pour valeurs respectives

$$n_0 = \frac{c}{v_0} \quad , \quad n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{et} \quad N_1 = \frac{c}{v}.$$

Entre les indices relatifs à l'air et les indices absolus nous avons les relations :

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{\frac{c}{v_1}}{\frac{c}{v_0}} = \frac{v_0}{v_1} = n \quad \text{et} \quad \frac{N_1}{n_0} = \frac{\frac{c}{v}}{\frac{c}{v_0}} = \frac{v_0}{v} = N.$$

En divisant par n_0^2 les deux membres de la relation (3) et en remplaçant $\frac{n_1}{n_0}$ et $\frac{N_1}{n_0}$ par les indices relatifs à l'air nous obtenons la relation très simple

$$n^2 = N^2 - \sin^2 \alpha, \tag{4}$$

qui à son tour donne la valeur de l'indice : $n = \sqrt{N^2 - \sin^2 \alpha}$.

Numériquement : $N = \sqrt{3}$, $\sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$n = \sqrt{3 - \frac{3}{4}},$$

$$n = \frac{3}{2}.$$

Conditions de possibilité de la mesure.

Nous ne pouvons calculer n que si l'angle α est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Nous devons avoir $0 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1$,

ou $0 \leqslant \sin^2 \alpha \leqslant 1$.

En tenant compte de l'expression (4) nous devons écrire

$$0 \leqslant N^2 - n^2 \leqslant 1,$$

ou $$N^2 - 1 \leqslant n^2 \leqslant N^2.$$

En prenant les racines carrées :

$$\sqrt{N^2 - 1} \leqslant n \leqslant N.$$

Les valeurs extrêmes de n seront donc

$$n = \sqrt{N^2 - 1} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2},$$

qui correspond à $\alpha = 90^\circ$ (émergence rasante), et

$$n = N = \sqrt{3},$$

qui correspond à $\alpha = 0^\circ$ (émergence normale, angle limite nul).

2° *Interposition entre* A *et* B *d'un liquide d'indice* N′ > N.

L'interposition entre A et B d'un liquide d'indice N′ > N formant une lame à faces parallèles (fig. 3), donne lieu à une réfraction intermédiaire.

D'après la deuxième loi de la réfraction, $N \sin i = N' \sin i'$, si N′ > N nous avons $i' < i$. La réfraction se produit toujours quelle que soit l'incidence. En particulier pour $i = \lambda$ nous aurons $i' < \lambda$.

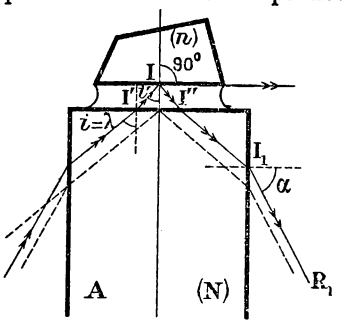


Fig. 3.

La réfraction au passage du liquide dans le verre B obéit à la relation

$$N' \sin i' = n \sin r.$$

Nous avons $n < N < N'$ et, par suite, $r > i'$: la réflexion totale peut se produire. Lorsqu'elle est réalisée, $r = 90^\circ$ et nous pouvons écrire

$$n \sin 90^\circ = N' \sin i' = N \sin i,$$
$$n = N \sin i,$$

ce qui donne, pour l'angle d'incidence i, la même valeur λ que s'il n'y avait pas de liquide interposé.

Le phénomène précédent n'est donc pas modifié.

Remarque. — Si l'indice N′ du liquide était inférieur à N, nous retrouverions le même phénomène que dans la question 1° et la même formule nous permettrait alors le calcul de l'indice N′ du liquide.

7. — Détermination de la profondeur d'un étang (application des lois de la réfraction et de la réflexion).

La surface de l'eau contenue dans un étang reçoit les rayons du Soleil (on considérera l'astre comme réduit à son centre) qui font avec le plan horizontal un angle dont la tangente est $\frac{3}{4}$. Un poteau vertical est planté sur le bord du bassin, du côté d'où vient la lumière ; la hauteur du poteau au-dessus de la surface de l'eau est 12 m.

1° Représenter sur une figure la construction de l'ombre du poteau sur le fond du bassin supposé horizontal.

2° Un observateur dont l'œil est placé sur la verticale passant par le bord opposé de l'étang regarde l'extrémité de l'ombre du poteau ; cette extrémité lui est juste cachée par l'image du Soleil donnée par réflexion sur la surface de l'étang. L'œil de l'observateur est à 18 m au-dessus de la surface libre de l'eau, l'indice de l'eau est

$\frac{4}{3}$, la largeur de l'étang entre le poteau et la verticale de l'œil de l'observateur est 70 m.

a) Dans quel plan l'œil de l'observateur doit-il se trouver ?

b) Quelle est la profondeur du bassin ?

(*Dijon.*)

1° Le rayon SA tombant sur le sommet du poteau vient frapper en I la surface du bassin. Ce rayon se réfracte suivant IR et atteint le fond du bassin au point R (fig. 1).

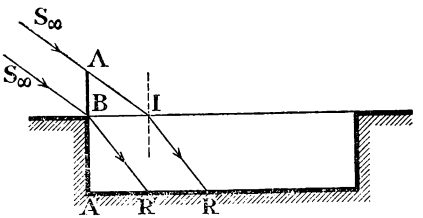


Fig. 1.

Le rayon SB tombant sur la base du poteau est arrêté avant de se réfracter. Il en est de même de tous les rayons tombant entre A et B sur le poteau. Pour les points voisins de la base B et sur le bord du bassin les rayons incidents se réfracteront suivant une direction parallèle à IR et viendront sur R′ au fond du bassin, de sorte que l'ombre du poteau aura pour longueur RR′ = BI.

Dans ces conditions la partie du fond du bassin qui est dans l'ombre du poteau a pour longueur A′R.

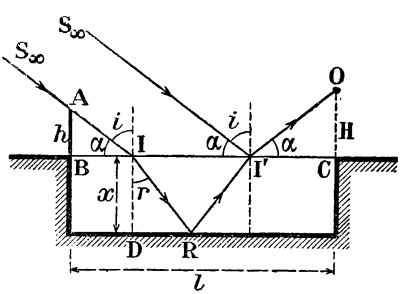


Fig. 2.

2° *a*) *Position de l'œil de l'observateur.*

Le rayon RI′ provenant de R se réfracte en I′ suivant I′O (fig. 2). I′O a la même direction qu'un rayon de Soleil réfléchi en I′ à la surface du bassin. Ce rayon est dans le plan d'incidence défini par SI′ et

la normale en I′ à la surface du bassin. Ce plan est le même que le plan défini par le Soleil, S, et par AB : il contient en outre IR et RI′.

b) *Calcul de la profondeur du bassin.*

Désignons par x la profondeur du bassin, par l sa largeur, par h la hauteur du poteau AB, par H la hauteur de l'œil au-dessus de la surface de l'eau. L'angle d'incidence des rayons solaires SI ou SI′ est i. L'angle de réflexion de ces rayons est aussi i. L'angle de réfraction du rayon IR est r. Cet angle r est aussi l'angle d'incidence du rayon RI′, qui donne le rayon réfracté I′O faisant l'angle de réfraction i.

La profondeur x est donnée par l'expression

$$\operatorname{tg} r = \frac{\mathrm{DR}}{x},$$

ou

$$2x \operatorname{tg} r = 2\,\mathrm{DR} = \mathrm{II}'.$$

Mais

$$\mathrm{II}' = \mathrm{BC} - \mathrm{BI} - \mathrm{I}'\mathrm{C}.$$

En tenant compte des relations $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{\mathrm{BI}} = \dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{I}'\mathrm{C}}$, nous avons

$$\mathrm{II}' = l - \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\mathrm{H}}{\operatorname{tg}\alpha}$$

et, par suite,

$$2x \operatorname{tg} r = l - \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\mathrm{H}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Exprimons $\operatorname{tg} r$ en fonction de $\operatorname{tg}\alpha$ et de l'indice de l'eau relatif à l'air. Nous savons que

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 r} - 1}}.$$

D'autre part la deuxième loi de la réfraction s'écrit

$$\sin i = n \sin r.$$

Or i et α sont complémentaires :

$$\sin i = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = n \sin r.$$

D'où l'expression de $\operatorname{tg} r$:

$$\operatorname{tg} r = \frac{1}{\sqrt{n^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) - 1}}.$$

Nous avons en définitive l'équation qui permet de calculer x :

$$\frac{2x}{\sqrt{n^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)-1}} = l - \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Application numérique :

$$n = \frac{4}{3}\ ;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}\ ;\quad l = 70\,\text{m};\quad h = 12\,\text{m};\quad H = 18\,\text{m}.$$

$$\frac{2x}{\sqrt{\frac{16}{9}\left(1+\frac{9}{16}\right)-1}} = 70 - \frac{12}{\frac{3}{4}} - \frac{18}{\frac{3}{4}},$$

$$\frac{2x}{\frac{4}{3}} = 30, \qquad x = \frac{30}{2}\times\frac{4}{3}$$

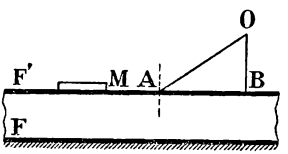
$$x = \mathbf{20\ m.}$$

CHAPITRE III

Dioptre plan. Lame à faces parallèles.

8. — Etude de la réfraction d'un rayon lumineux à travers une glace à faces parallèles argentée sur une face.

On considère une glace à faces parallèles, argentée sur sa face inférieure, F, et un objet plat à bord net, M, posé sur l'autre face, F'. Montrer qu'il est possible, ainsi que le font les miroitiers, d'apprécier l'épaisseur de la glace d'après la distance apparente MA, A étant le point de la face antérieure qui semble coïncider avec l'image de M par réflexion, quand on vise dans une direction faisant l'angle i avec la normale de la lame. Indiquer pourquoi ce procédé, employé sans précautions particulières, est très peu précis.



Pour obtenir un meilleur résultat, on utilise une équerre, ABO, qui permet d'assurer la direction de visée OA. On déplace l'équerre (à l'aide d'un pied à coulisse auquel elle est fixée) jusqu'à ce que l'image M' du bord M se projette en A. Calculer, avec une approximation de l'ordre de la minute, l'angle A de l'équerre pour que, dans les conditions précédentes, la distance MA soit exactement une fois et demie l'épaisseur de la glace, en supposant que l'indice du verre est 1,5.

On aura recours aux données suivantes :

$\sin 63^\circ 30' = 0{,}895$; $\sin 64^\circ = 0{,}899$; $\sin 64^\circ 30' = 0{,}903$.

(Lyon.)

Étudions la marche d'un rayon lumineux MI issu du bord M de l'objet.

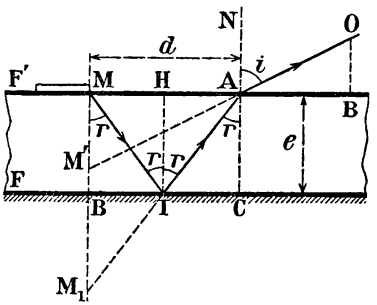
Ce rayon forme avec la normale MB à la face F' un angle r. Il tombe sur la face F sous l'incidence r et se réfléchit suivant la droite IA, qui forme avec la normale IH un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence r. Le rayon IA passe donc par le point M_1, symétrique de M par rapport au miroir F. M_1 est l'image virtuelle du point objet M.

Le rayon IA arrive sur le dioptre F' sous l'incidence r. Il se réfracte suivant la droite AO qui forme avec la normale AN l'angle i tel que

$$\sin i = n \sin r. \qquad (1)$$

L'œil, visant dans la direction OA, aperçoit l'image, M', du point M_1 donnée par le dioptre F'. Par raison de symétrie, cette image est sur la droite MM_1. Elle est donc à l'intersection des droites MM_1 et OA.

Le problème consiste à déterminer la relation existant entre l'épaisseur e de la lame, la distance $d = MA$ et l'angle i.



Dans le triangle MHI, nous avons la relation

$$IH = \frac{MH}{\operatorname{tg} r} = \frac{MA}{2 \operatorname{tg} r},$$

ou

$$e = \frac{d}{2} \frac{\cos r}{\sin r}. \qquad (2)$$

De la relation (1) nous tirons

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} \quad \text{et} \quad \cos r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}.$$

En portant ces valeurs dans la relation (2), il vient

$$e = \frac{d}{2} \frac{\sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 i}{n^2}}}{\dfrac{\sin i}{n}},$$

$$e = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2 i} - 1}. \qquad (3)$$

Nous pouvons écrire cette relation sous la forme

$$e = Kd \qquad (4)$$

en posant

$$K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2 i} - 1}.$$

L'angle i et l'indice n étant connus, K est une constante : l'épaisseur e est proportionnelle à la distance MA $= d$.

Il est donc possible d'apprécier l'épaisseur e d'après la distance apparente MA.

Précision de la mesure.

Le théorème des erreurs relatives appliqué à la relation (4) donne

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta d}{d}.$$

Nous obtiendrons donc une précision du $\frac{1}{100}$ par exemple, dans la détermination de e, si nous mesurons la distance d au $\frac{1}{100}$ près. Ce calcul suppose toutefois que K reste constant. Or, si nous visons l'image M′ sans prendre de précautions particulières, l'angle i ne sera pas parfaitement défini : K variera à chaque visée. La mesure de e manquera de précision.

L'emploi d'une équerre permet d'obtenir une ligne de visée bien déterminée; par ailleurs le pied à coulisse permet de mesurer la distance d au $\frac{1}{10}$ mm près.

Calcul de l'angle A *de l'équerre.*

L'angle A est le complément de l'angle de visée i.

De la formule (3) nous tirons

$$4\left(\frac{e}{d}\right)^2 = \frac{n^2}{\sin^2 i} - 1,$$

$$\sin^2 i = \frac{n^2}{4\left(\frac{e}{d}\right)^2 + 1},$$

$$\sin i = \frac{n}{\sqrt{4\left(\frac{e}{d}\right)^2 + 1}}.$$

Application numérique : $n = 1{,}5 = \frac{3}{2}$, MA $= d = 1{,}5\,e$ ou $\frac{e}{d} = \frac{2}{3}$.

$$\sin i = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{4 \times \frac{4}{9} + 1}} = \frac{9}{2\sqrt{25}},$$

$$\sin i = 0{,}900.$$

L'angle i est compris entre 64° et 64° 30′ : $i = 64° a'$. La différence des sinus de 64° 30′ et 64° est

$$\sin 64° 30' - \sin 64° = 0{,}903 - 0{,}899 = 0{,}004.$$

La différence des sinus de i et 64° est

$$\sin 64° a' - \sin 64° = 0{,}900 - 0{,}899 = 0{,}001.$$

La différence 0,004 correspond à 30′. La différence 0,001 correspond à

$$a = 30' \times \frac{0{,}001}{0{,}004} \approx 7'.$$

$$i = 64° 7'$$

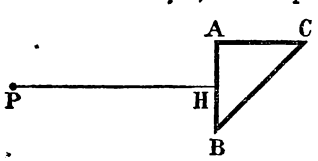
L'angle A de l'équerre est le complément de i :

$$\widehat{A} = 90° - 64° 7'.$$

$$\widehat{A} = 25° 53'.$$

9. — Etude d'un prisme à réflexion totale.

Un prisme de flint, d'indice 1,6, a pour section droite un triangle rectangle isocèle ABC, dont les côtés égaux mesurent 2 cm. La face AB reçoit, dans un plan de section droite, un faisceau de rayons lumineux issu d'une source ponctuelle, P, placée sur la normale à AB menée par son milieu H ; on donne PH = 50 cm.



1° Quelle est la position et la nature de l'image, P_1, de P fournie par le dioptre air-verre AB ?

2° Quel est l'angle limite correspondant aux deux milieux transparents en présence ? Montrer que l'angle d'incidence de tout rayon issu de P et tombant sur la face hypoténuse BC est toujours supérieur à cet angle limite. Préciser la position et la nature de l'image, P_2, de P_1 donnée par la face BC du prisme. On donne

$$\sin 38° = 0{,}616 \ ; \ \sin 39° = 0{,}629.$$

3° Déterminer la position et la nature de l'image définitive, P′, que le prisme donne de P.

4° On remplace le prisme par un miroir plan, qui occupe la position de la face hypoténuse BC ; on obtient alors une image, P″, de P. L'image P″ est-elle confondue avec P′ ? S'il n'en est pas ainsi, déterminer la distance P″P′.

(Nancy.)

1° Tous les rayons issus de P tombent sur la face AB sous une incidence i inférieure à l'angle $\alpha = \widehat{APH}$ tel que $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{AH}{PH}$.

Cette tangente est celle d'un petit angle. Nous pouvons écrire

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ radian.}$$

Il en résulte que la réfraction de tous les rayons issus de P s'effectue dans les conditions d'approximation de Gauss : le dioptre donne de P une image virtuelle, P_1 (fig. 1), située sur la droite PH, à la distance P_1H telle que

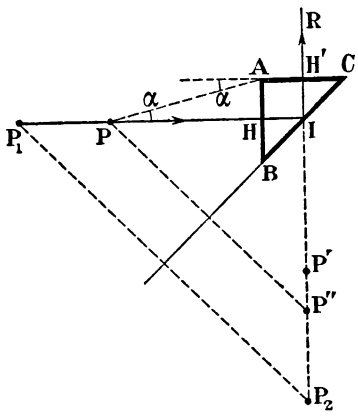


Fig. 1.

$$\frac{PH}{1} = \frac{P_1H}{n},$$

d'où $P_1H = n \times PH.$

Numériquement :

$n = 1{,}6$, $PH = 50$ cm,

$P_1H = 1{,}6 \times 50,$

$\mathbf{P_1H = 80\ cm.}$

2° *Calcul de l'angle limite.*

L'angle limite λ correspondant aux deux milieux transparents est, par définition, l'angle de réfraction r correspondant à l'angle d'incidence $i = 90°$. Il est donné par la loi de Descartes,

$$\sin 90° = n \sin \lambda,$$

ou

$$\sin \lambda = \frac{1}{n}.$$

Numériquement :

$$\sin \lambda = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625.$$

L'angle λ est compris entre 38° et 39°. La différence des sinus de ces deux derniers angles est

$$\sin 39° - \sin 38° = 0{,}629 - 0{,}616 = 0{,}013.$$

La différence des sinus de λ et 38° est

$$\sin \lambda - \sin 38° = 0{,}625 - 0{,}616 = 0{,}009.$$

La différence 0,013 correspond à une différence de 60′. La différence de 0,009 correspond à une différence $\frac{60 \times 0{,}009}{0{,}013}$.

$$\lambda = 38^\circ + 60' \times \frac{0{,}009}{0{,}013},$$

$$\lambda = 38^\circ 42'.$$

Le rayon PH, tombant normalement sur la face AB, pénètre dans le prisme sans subir de déviation. Il forme avec la normale AI à la face BC un angle $r' = 45^\circ$, supérieur à l'angle limite λ. Il est donc réfléchi totalement, rencontre la face AC sous une incidence nulle et émerge suivant H′R, normalement à la face AC, c'est-à-dire perpendiculairement à la direction du rayon incident (fig. 2).

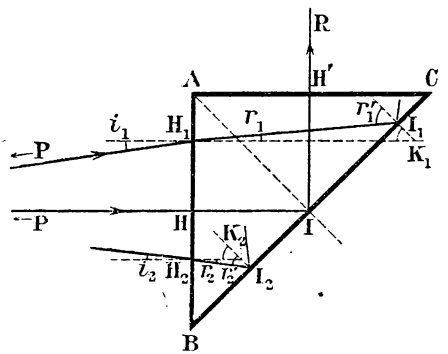


Fig. 2.

Le rayon PH_1, tombant sur la partie AH de la face AB, se réfracte suivant la droite H_1I_1. (Entre l'angle d'incidence i_1 et l'angle de réfraction r_1, nous avons la relation $i_1 = nr_1$.) Il tombe sur la face BC sous l'incidence r'_1. Dans le triangle $H_1I_1K_1$, l'angle r'_1 occupe la position d'angle extérieur et nous avons

$$r'_1 = r_1 + \widehat{K}_1 = r_1 + 45^\circ.$$

Cet angle est supérieur à l'angle limite quel que soit l'angle d'incidence i_1 : le rayon H_1I_1 est réfléchi totalement par la face BC.

Le rayon PH_2, tombant sur la partie BH de la face AB, se réfracte suivant la droite H_2I_2. (Entre les angles i_2 et r_2, nous avons la relation $i_2 = nr_2$.) Il tombe sur la face BC sous l'incidence r'_2. Dans le triangle $H_2I_2K_2$, l'angle K_2 occupe la position d'angle extérieur et nous avons

$$\widehat{K}_2 = r_2 + r'_2,$$

d'où

$$r'_2 = \widehat{K}_2 - r_2 = 45^\circ - r_2.$$

La valeur maximale de i_2 a été calculée :

$$i_2 = 0{,}02 \text{ radian.}$$

La valeur maximale de r_2 est donc

$$r_2 = \frac{i_2}{n} = \frac{0{,}02}{1{,}6} = \frac{1}{80} \text{ radian ou } 43'.$$

L'angle r'_2 est donc supérieur à $45^\circ - 43'$, donc supérieur à l'angle limite quel que soit l'angle i_2. Le rayon H_2I_2 est réfléchi totalement par la face BC.

La face BC se comporte donc comme un miroir plan pour tous les rayons issus de P (fig. 1). Cette face donne de l'image P_1, jouant le rôle d'objet réel, une image virtuelle, P_2, symétrique de P_1 par rapport à BC. L'image P_2 est située sur la normale à BC issue de P_1, à la distance du point I, $P_2I = P_1I = P_1H + HI$.

Numériquement : $P_1H = 80$ cm, $HI = \frac{AC}{2} = 1$ cm.

$$P_2I = 80 + 1,$$

$$\mathbf{P_2I = 81 \text{ cm.}}$$

3° L'image virtuelle P_2 joue le rôle d'objet réel pour le dioptre AC. Celui-ci en donne une image virtuelle, P', à la distance P'H' telle que

$$\frac{P_2H'}{n} = \frac{P'H'}{1},$$

ou

$$P'H' = \frac{P_2H'}{n} = \frac{P_2I + IH'}{n}.$$

On en déduit

$$P'I = P'H' - IH'.$$

Numériquement :

$$P'H' = \frac{81 + 1}{1{,}6} = \frac{82}{1{,}6} = 51{,}25 \text{ cm.}$$

$$P'I = 51{,}25 - 1,$$

$$\mathbf{P'I = 50{,}25 \text{ cm.}}$$

4° Le miroir plan M, occupant la position BC, donnerait de P une image, P'', symétrique de P par rapport à BC (fig. 1). P'' est donc située sur la droite IP', à une distance $IP'' = PI = 51$ cm. Les images

P″ et P′ ne sont pas confondues : le prisme à réflexion totale et le miroir ne sont donc pas équivalents. La distance P″P′ est

$$P''P' = P''I - P'I = 51 - 50{,}25,$$

$$\mathbf{P''P' = 0{,}75\ cm.}$$

Remarque.

La distance P″P′ peut s'exprimer en fonction du côté AB.

En effet, $P''P' = P''I - P'I.$

Or $P''I = PI = PH + HI = PH + \frac{AB}{2}.$

D'autre part $P'I = P'H' - IH' = \frac{P_2I + IH'}{n} - IH'.$

Mais $P_2I = P_1I = P_1H + HI = n.PH + HI,$

d'où $P'I = \frac{n.PH + HI + IH'}{n} - IH' = PH + \frac{AB}{n} - \frac{AB}{2}.$

La distance P″P′ est donc

$$P''P' = PH + \frac{AB}{2} - \left(PH + \frac{AB}{n} - \frac{AB}{2}\right),$$

$$P''P' = AB\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Nous remarquons que le prisme à réflexion totale est assimilable à un système optique composé d'une lame à faces parallèles d'épaisseur $e = AB$, perpendiculaire au rayon PH, et d'un miroir plan, incliné à 45° sur ce rayon.

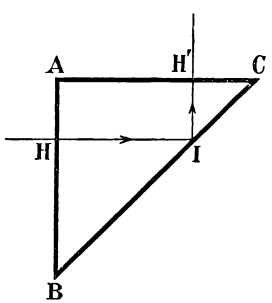


Fig. 3.

Ce résultat est évident. En effet, tout rayon, tombant en un point quelconque, H, de la face AB (fig. 3), normalement à cette face, suit le chemin HIH′. Or H′I = HA et HI = HB. D'où HI + H′I = AB. Tous les rayons issus de P, tombant à peu près normalement sur la face AB, parcourent sensiblement dans le verre une distance $e = AB$. Tout se passe donc comme s'ils traversaient une lame à faces parallèles d'épaisseur *e*.

10. — Lame à faces parallèles argentée : image d'un segment de droite non parallèle à la lame.

Une lame de verre plane a une épaisseur $e = 0{,}3$ cm et le verre qui la constitue a un indice $n = \frac{3}{2}$. L'une de ses faces est rendue réfléchissante par argenture.

1° Déterminer la position et la nature de l'image, donnée par ce système, d'un objet n'envoyant sur la lame que des rayons presque normaux, dans les deux cas suivants :

a) **objet réel ponctuel à 0,8 cm de la face non argentée ;**

b) **objet réel assimilable à un segment de droite AB, non parallèle aux faces de la lame, tel que A soit à 0,8 cm de la face non argentée et B à 1,2 cm de cette même face. On donne AB = 0,6 cm. Les images intermédiaires sont-elles égales à AB ? Et l'image définitive ?**

2° Montrer que le système précédent fonctionne dans les deux cas comme un miroir plan unique, dont on déterminera la position par rapport aux faces de la lame.

(Clermont.)

1° Le système optique peut être considéré comme composé d'un dioptre D et d'un miroir plan M parallèles. Les rayons issus de l'objet s'écartant peu de la normale, nous nous trouvons dans les conditions d'approximation de Gauss et le système est stigmatique pour tous les points de cet objet.

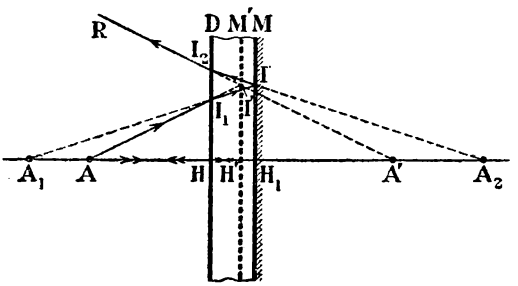


Fig. 1.

a) Soit un objet ponctuel A situé à la distance AH = d du dioptre D (fig. 1).

Les rayons issus de A sont successivement

— réfractés par le dioptre D,

— réfléchis par le miroir M,

— réfractés de nouveau par le dioptre D.

La première réfraction donne naissance à une image intermédiaire, A_1. La réflexion sur le miroir conduit à la formation d'une deuxième image intermédiaire, A_2. La deuxième réfraction donne naissance à l'image définitive, A'.

Toutes ces images sont situées sur la normale au système optique passant par A.

L'image A_1 est virtuelle et située à une distance A_1H du dioptre telle que

$$\frac{AH}{1} = \frac{A_1H}{n},$$

d'où

$$A_1H = n \,.\, AH = nd. \tag{1}$$

La distance A_1H_1 du point A_1 au miroir M est

$$A_1H_1 = A_1H + HH_1 = nd + e.$$

A_1 joue le rôle d'objet réel pour M, qui en donne une image A_2 virtuelle, symétrique de A_1 par rapport à M. La distance de A_2 au miroir est donc

$$A_2H_1 = A_1H_1 = nd + e,$$

et sa distance au dioptre est

$$A_2H = A_2H_1 + H_1H = nd + 2e. \tag{2}$$

A_2 joue le rôle d'objet réel pour D, qui en donne une image virtuelle située à la distance A'H telle que $\frac{A_2H}{n} = \frac{A'H}{1}$.

D'où

$$A'H = \frac{A_2H}{n} = d + 2\frac{e}{n}. \tag{3}$$

Application numérique :

$$d = 0{,}8 \text{ cm}, \quad e = 0{,}3 \text{ cm}, \quad n = \frac{3}{2}.$$

$$A'H = 0{,}8 + 2 \times 0{,}3 \times \frac{2}{3},$$

$$\mathbf{A'H = 1{,}2 \text{ cm}.}$$

Les distances au dioptre des images intermédiaires sont données par les relations (1) et (2) :

$$A_1H = \frac{3}{2} \times 0{,}8 = 1{,}2 \text{ cm},$$

$$A_2H = \frac{3}{2} \times 0{,}8 + 2 \times 0{,}3 = 1{,}8 \text{ cm}.$$

b) Le point B est à l'intersection d'un cercle de rayon AB = 0,6 cm et d'une droite menée parallèlement au dioptre D par le point *b* situé à la distance $bH = BK = d' = 1{,}2$ cm de celui-ci (fig. 2).

Les distances au dioptre des images B_1, B_2 et B′ sur la droite BK sont données par les relations trouvées précédemment :

$$B_1K = nd' = \frac{3}{2} \times 1{,}2 = 1{,}8 \text{ cm},$$

$$B_2K = nd' + 2e = 1{,}8 + 2 \times 0{,}3 = 2{,}4 \text{ cm},$$

$$B'K = d' + 2\frac{e}{n} = 1{,}2 + 2 \times 0{,}3 \times \frac{2}{3} = 1{,}6 \text{ cm}.$$

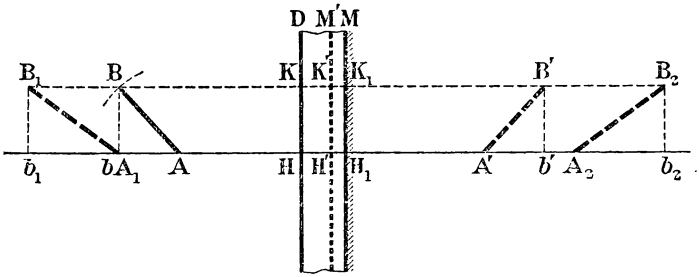


Fig. 2.

Nous pouvons donc construire les images A_1B_1, A_2B_2 et A′B′ de AB. Pour en calculer les dimensions, abaissons des points B_1, B_2 et B′ les perpendiculaires B_1b_1, B_2b_2 et B′*b*′ sur AH.

Image A′B′.

Dans le triangle AB*b*, nous connaissons

$$AB = 0{,}6 \text{ cm}, \quad bA = bH - AH = 1{,}2 - 0{,}8 = 0{,}4 \text{ cm}.$$

Le troisième côté B*b* est donné par la relation de Pythagore :

$$\overline{Bb}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{Ab}^2 = 0{,}6^2 - 0{,}4^2 = 0{,}2,$$

$$Bb = \sqrt{0{,}2} = 0{,}45 \text{ cm}.$$

Dans le triangle A′B′*b*′, nous connaissons

$$A'b' = b'H - A'H = 1{,}6 - 1{,}2 = 0{,}4 \text{ cm} = Ab,$$

$$B'b' = Bb = 0{,}45 \text{ cm}.$$

Les deux triangles rectangles ABb et A'B'b' sont égaux comme ayant leurs deux côtés de l'angle droit égaux. Les troisièmes côtés sont donc égaux :

$$A'B' = AB.$$

L'image finale A'B' est virtuelle et égale à l'objet AB.

Images A_1B_1 *et* A_2B_2.

Ces deux images sont égales puisqu'elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à M.

Calculons la longueur de l'image A_1B_1.

Nous connaissons les côtés b_1A_1 et b_1B_1 :

$$b_1A_1 = b_1H - A_1H = B_1K - A_1H = 1{,}8 - 1{,}2 = 0{,}6 \text{ cm},$$

et $$B_1b_1 = Bb = \sqrt{0{,}2} \text{ cm}.$$

Le troisième côté, A_1B_1, est donné par la relation de Pythagore

$$\overline{B_1A_1}^2 = \overline{A_1b_1}^2 + \overline{b_1B_1}^2 = 0{,}36 + 0{,}2 = 0{,}56,$$

$$A_1B_1 = \sqrt{0{,}56} = 0{,}75 \text{ cm} = A_2B_2.$$

Les deux images intermédiaires sont virtuelles et ne sont pas égales à l'objet.

2° La distance AA' du point objet A à son image, A', donnée par le système est

$$AA' = AH + HA' = d + d + 2\frac{e}{n} = 2d + 2\frac{e}{n},$$

$$AA' = 2\left(d + \frac{e}{n}\right). \qquad (4)$$

Le point H', milieu de AA', est à une distance $AH' = d + \frac{e}{n}$ de A et à la même distance de A'.

A' est donc symétrique de A par rapport à H'.

La même démonstration s'applique à tous les points de l'objet.

L'image A'B' est donc symétrique de l'objet AB par rapport au plan M' mené par le point H' parallèlement à M.

Tout se passe donc comme si le système se comportait comme un miroir plan M'.

Ce miroir fictif est à une distance HH' du dioptre D égale à $\frac{e}{n}$.

C'est précisément la distance au dioptre de l'image virtuelle du miroir M.

Le système fonctionne donc comme un miroir plan unique M', image du miroir M donnée par le dioptre D.

Remarque.

Si la lame argentée était remplacée par un miroir plan M″, celui-ci donnerait du point objet A une image A″ symétrique de A par rapport au miroir. La distance AA″ serait

$$AH'' = 2(d + e).$$

Cette distance est différente de AA′ ; la lame argentée n'est pas équivalente à un miroir sans épaisseur.

La distance A″A′ serait

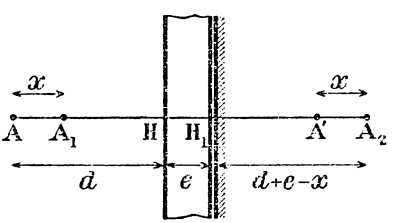
$$A''A' = AA'' - AA' = 2(d + e) - 2\left(d + \frac{e}{n}\right),$$

$$A''A' = 2e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On voit que la lame argentée est équivalente à un système optique composé d'un miroir plan, M″, placé en M, et d'une lame à faces parallèles, perpendiculaire à l'axe du système et d'épaisseur $2e$.

Autre solution.

Nous pouvons assimiler la lame argentée à un système optique formé d'une lame à faces parallèles, d'épaisseur e, et d'un miroir plan séparé de la lame par une lame d'air d'épaisseur négligeable.



La lame à faces parallèles donne de A une image virtuelle, A_1, déplacée par rapport à A, dans le sens de la lumière, d'une longueur x dont nous supposerons connue l'expression

$$x = e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

A_1 est à la distance $A_1H_1 = AH_1 - x = d + e - x$ du miroir. Celui-ci donne de A_1, jouant le rôle d'objet, une image A_2, symétrique de A_1 par rapport au miroir. A_2 est à la distance $A_2H_1 = d + e - x$ de la lame. Celle-ci en donne une image A′ déplacée, dans le sens de la lumière réfléchie, d'une longueur x. La distance $A'H_1$ est donc

$$A'H_1 = d + e - 2x$$

et la distance A'H est

$$A'H = d + 2e - 2x.$$

La distance AA' est donc

$$AA' = 2d + 2e - 2x = 2(d + e - x),$$

ou

$$AA' = 2\left[d + e - e\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right],$$

$$AA' = 2\left(d + \frac{e}{n}\right).$$

Nous retrouvons la formule (4).

11. — Calcul du déplacement latéral d'un pinceau lumineux cylindrique traversant une lame à faces parallèles.

Un étroit faisceau cylindrique de lumière, que l'on assimilera à un rayon lumineux, tombe sous une incidence de 60° sur une lame transparente à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur e. Sur un écran placé suffisamment loin de la lame et perpendiculaire au rayon incident, on observe un cercle lumineux si la lame est animée d'un mouvement rapide de rotation autour du rayon incident. On demande le rayon du cercle.

Application numérique : $n = \sqrt{3}$, $e = \sqrt{3}$ cm.

(Besançon, partiel.)

Le rayon incident SI se réfracte suivant II' en se rapprochant de la normale IN. Entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r, nous avons la relation

$$\sin i = n \sin r. \qquad (1)$$

Le rayon II' se réfracte suivant I'R en s'éloignant de la normale. Entre l'angle d'incidence r' et l'angle de réfraction i', nous avons la relation

$$n \sin r' = \sin i',$$

ou

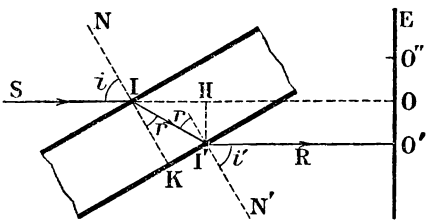
$$\sin i' = n \sin r'. \qquad (2)$$

Les angles r et r' sont égaux comme alternes-internes. Des relations (1) et (2) nous tirons $\sin i = \sin i'$ et $i = i'$.

L'angle d'émergence est égal à l'angle d'incidence. Le rayon émergent est donc parallèle au rayon incident.

Si la lame n'existait pas, le rayon lumineux donnerait sur l'écran un point lumineux O. L'interposition de la lame provoque un déplacement latéral du rayon. Les droites SO et I'O' étant parallèles, ce déplacement est égal à I'H quelle que soit la position de l'écran.

Si la lame est animée d'un mouvement rapide de rotation autour de SO, le plan d'incidence tourne et le point O' décrit un cercle de centre O. Par suite de la persistance des impressions lumineuses sur la rétine, l'œil aperçoit une courbe circulaire lumineuse sur l'écran.



Calcul du rayon $\rho = I'H$.

En considérant le triangle IHI', nous avons la relation

$$I'H = II' \sin I'IH = II' \sin (i - r).$$

En considérant le triangle II'K, nous avons la relation

$$II' = \frac{IK}{\cos r} = \frac{e}{\cos r}.$$

$$\rho = \frac{e \sin (i - r)}{\cos r},$$

$$\rho = \frac{e}{\cos r} (\sin i \cos r - \sin r \cos i) = e (\sin i - \operatorname{tg} r \cos i).$$

Nous connaissons l'angle i : $i = 60^\circ$.

$$\sin i = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos i = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

De la relation (1) nous tirons

$$\sin r = \frac{\sin i}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2n}$$

et $$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{3}{4n^2}} = \frac{\sqrt{4n^2 - 3}}{2n}.$$

$$\operatorname{tg} r = \frac{\sin r}{\cos r} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4n^2 - 3}}.$$

$$\rho = e\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4n^2 - 3}} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{e\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3}}\right).$$

Application numérique : $n = \sqrt{3}$, $e = \sqrt{3}$ cm.

$$\rho = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{12 - 3}}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

$$\rho = 1 \text{ cm.}$$

CHAPITRE IV

Prisme.

12. — Construction de la courbe de variation de la déviation d'un rayon à travers un prisme en fonction de l'incidence.

Soit un prisme d'angle au sommet 30° et d'indice $n = 1{,}5$.

Donner les valeurs des angles d'incidence, d'émergence et de l'angle de déviation dans les cas suivants : incidence rasante ; incidence normale ; minimum de déviation ; émergence rasante ; émergence normale.

Faire un schéma correspondant à chaque cas de figure. Déduire de cette étude les conditions d'émergence. Tracer la courbe de la variation de la déviation en fonction de l'incidence.

(Rome.)

Le tracé de la marche des rayons dans un prisme permet d'écrire les quatre formules classiques :

$$\sin i = n \sin r, \tag{1}$$

$$\sin i' = n \sin r', \tag{2}$$

$$A = r + r', \tag{3}$$

$$D = i + i' - A. \tag{4}$$

Ces formules sont valables dans tous les cas, en respectant la convention de signe suivante :

i et i' sont comptés positivement si le rayon incident SI et le rayon émergent I'R sont situés du côté de la base par rapport à la normale correspondante. i et i' sont comptés négativement si ces rayons sont situés du côté de l'arête.

La convention est inverse pour les angles r et r'.

Dans le problème donné, l'angle A du prisme et son indice n sont connus.

1° *Incidence rasante et incidence normale.*

Dans les deux cas, l'angle i est connu. Les quatre formules constituent un système de quatre équations à quatre inconnues, que l'on peut résoudre numériquement.

Incidence rasante.

Le rayon incident SI arrive tangentiellement à la face AB du prisme : $i = 90^0$ (fig. 1).

De l'équation (1) nous tirons l'angle r qui est, par définition, égal à l'angle limite λ correspondant aux deux milieux air-verre.

L'équation (3) donne l'angle r' :

$$r' = A - r = A - \lambda.$$

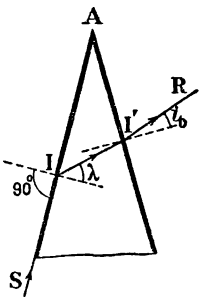


Fig. 1.

L'angle d'émergence i' prend la valeur i_0 donnée par l'équation (2) :

$$\sin i_0 = n \sin (A - \lambda). \qquad (5)$$

La déviation D prend la valeur D_0 donnée par l'équation (4) :

$$D_0 = 90 + i_0 - A. \qquad (6)$$

Application numérique :

$$A = 30^0, \quad n = 1{,}5.$$

L'angle $r = \lambda$ est donné par la formule

$$\sin \lambda = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} = 0{,}667.$$

La table des lignes trigonométriques naturelles donne

$$\lambda = 41^0\,50',$$
$$r' = 30^0 - 41^0\,50' = -\,11^0\,50'.$$

L'angle r' est négatif : le rayon II' est situé au-dessous de la normale, c'est-à-dire du côté de la base du prisme.

L'angle i_0 est donné par la formule (5) :

$$\sin i_0 = \frac{3}{2} \sin (-\,11^0\,50') = -\,\frac{3}{2} \sin 11^0\,50'.$$

La table des lignes trigonométriques naturelles donne

$$\sin i_0 = -\,\frac{3}{2} \times 0{,}205 = -\,0{,}307,$$

ou

$$\sin (-\,i_0) = 0{,}307,$$
$$\mathbf{i_0 = -\,17^0\,53'.}$$

L'angle i_0 est négatif : le rayon émergent I'R est situé au-dessus de la normale, c'est-à-dire du côté de l'arête.

La déviation $D = D_0$ est donnée par la formule (6) :

$$D_0 = 90 - 17^\circ 53' - 30^\circ.$$

$$\mathbf{D_0 = 42^\circ 7'.}$$

Remarque.

Nous n'avons pas considéré le cas où le rayon incident arrive rasant, de l'autre côté de la normale ($i = -90^\circ$).

Nous avons, en effet, dans ce cas $r = -\lambda$ et $r' = A - r = A + \lambda$.

L'angle r' est supérieur à l'angle limite λ, quel que soit A : ce rayon

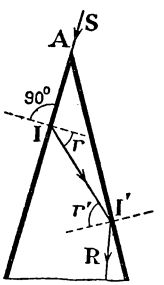


Fig. 2.

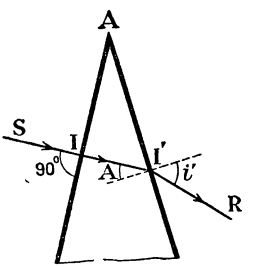


Fig. 3.

subit toujours le phénomène de réflexion totale sur la deuxième face du prisme (fig. 2).

Incidence normale.

Le rayon incident SI arrive normalement sur la face AB : $i = 0$ (fig. 3). Il en résulte que $r = 0$: le rayon incident n'est pas dévié par la première face du prisme.

L'angle r' est donné par l'équation (3) :

$$r' = A - r = A.$$

L'angle i' est tel que

$$\sin i' = n \sin r' = n \sin A. \qquad (7)$$

Et la déviation D est

$$D = i' - A. \qquad (8)$$

Application numérique : $\sin r' = \sin A = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$,

$$r' = 30^0.$$

$$\sin i' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

La table des lignes trigonométriques naturelles donne

$$i' = 48^0\,35'.$$

$$D = 48^0\,35' - 30^0,$$

$$\mathbf{D = 18^0\,35'.}$$

2° *Émergence rasante et émergence normale.*

Dans les deux cas, l'angle d'émergence est connu : il a la valeur qui était donnée précédemment à l'angle d'incidence i.

Les angles i et i' entrant d'une façon symétrique dans le système d'équations, lorsque l'angle d'émergence i' prend la valeur i, l'angle d'incidence i doit prendre la valeur i'.

Ce résultat peut être également considéré comme une conséquence du principe du retour inverse de la lumière. Donner à l'angle d'émergence i' la valeur i revient à changer le sens de propagation de la lumière : le rayon suit le chemin inverse. La déviation est identique dans les deux sens.

Appliquons cette remarque aux deux cas envisagés.

Émergence rasante (fig. 4).

L'angle d'incidence i a la valeur i_0 donnée par la formule (5) :

$$i_0 = \mathbf{-\,17^0\,53'.}$$

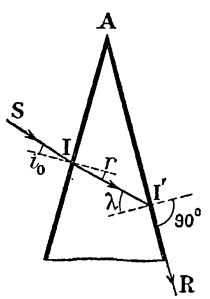


Fig. 4.

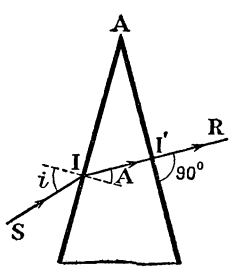


Fig. 5.

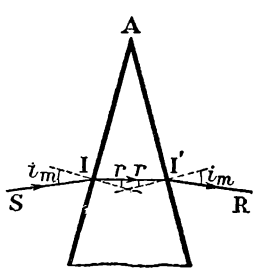


Fig. 6.

La déviation D a la valeur D_0, donnée par la formule (6) :

$$D_0 = \mathbf{42^0\,7'.}$$

Émergence normale (fig. 5).

L'angle d'incidence i a la valeur i' donnée par la formule (7) :

$$i = 48^\circ 35'.$$

La déviation D a la valeur correspondante donnée par la formule (8) :

$$\mathbf{D = 18^\circ 35'.}$$

3° *Minimum de déviation.*

Nous ne connaissons, dans ce cas, ni i, ni i'. Nous venons de voir toutefois que, pour une valeur déterminée de la déviation D, il y a généralement deux valeurs de l'angle d'incidence, correspondant aux deux trajets inverses de la lumière. Or on constate expérimentalement que la déviation minimale se produit pour une seule valeur de l'angle d'incidence : c'est que celui-ci est le même pour les deux trajets inverses. On a donc $i = i'$ et $r = r'$ (fig. 6).

La troisième formule du prisme donne

$$A = 2r, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{A}{2}.$$

L'angle d'incidence i a la valeur i_m donnée par l'équation (1) :

$$\sin i_m = n \sin \frac{A}{2}. \tag{9}$$

Enfin la déviation D a la valeur D_m donnée par l'équation (4) :

$$D_m = 2i_m - A. \tag{10}$$

Application numérique : $\sin \dfrac{A}{2} = \sin \dfrac{30^\circ}{2} = \sin 15^\circ = 0{,}259.$

$$\sin i_m = \frac{3}{2} \sin 15^\circ = \frac{3}{2} \times 0{,}259 = 0{,}389.$$

La table des lignes trigonométriques naturelles donne

$$i_m = 22^\circ 51'.$$

$$D_m = 2\,i_m - A = 2 \times 22^\circ 51' - 30^\circ,$$

$$\mathbf{D_m = 15^\circ 42'.}$$

Conditions d'émergence.

Résumons les résultats obtenus dans un tableau :

i	90°	$48^\circ 35'$	i_m $(22^\circ 51')$	0°	i_0 $(-17^\circ 53')$
D	D_0 $(42^\circ 7')$	$18^\circ 35'$	D_m $(15^\circ 42')$	$18^\circ 35'$	D_0 $(42^\circ 7')$.

Nous voyons que les seuls rayons qui puissent émerger correspondent à des angles d'incidence compris entre 90° et la valeur i_0 telle que

$$\sin i_0 = n \sin (A - \lambda),$$

ou

$$i_0 = -17^\circ 53'.$$

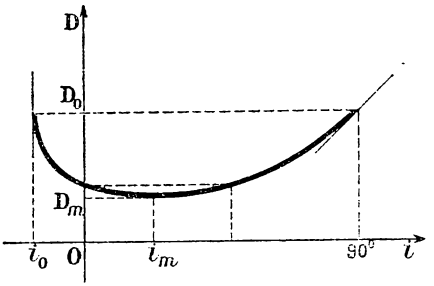


Fig. 7.

La courbe représentative $D = f(i)$ illustre ces conditions d'émergence (fig. 7).

Remarque. — *a*) Un tracé précis de cette courbe montrerait qu'avec la même échelle pour D et i, elle a une tangente verticale pour $i = i_0$ et une tangente à 45° pour $i = 90^\circ$.

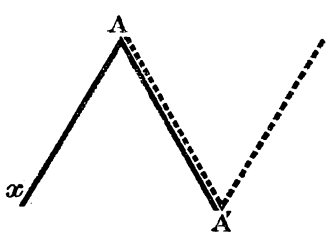
b) On pourrait aussi calculer directement D_m à partir de la relation

$$\sin \frac{D_m + A}{2} = n \sin \frac{A}{2}$$

qui résulte des équations (9) et (10).

13. — Déviation d'un faisceau lumineux à travers un prisme et un système de deux prismes accolés.

On considère un prisme d'angle au sommet A = 60° et dans un plan perpendiculaire à son arête un faisceau de rayons incidents convergeant en un point I de la face d'entrée Ax. On supposera le faisceau limité par la normale en I et la partie Ix de cette face.



1° Tracer la marche du faisceau à travers le prisme. Déterminer les positions des rayons qui limitent le faisceau à l'intérieur et à l'extérieur du prisme.

On prendra pour indice de ce prisme $n = \sqrt{2}$.

2° Déterminer aussi la position du rayon correspondant au minimum de déviation ; calculer cette déviation.

3° Que deviendrait ce dernier rayon si l'on accolait au prisme d'angle A un deuxième prisme de même angle, A', et de même indice, de manière que la face de sortie du deuxième prisme soit parallèle à la face d'entrée du premier ? Déterminer la position du rayon émergent par rapport au rayon incident. On supposera AI = 3 cm et AA' = 5 cm.

4° Que deviendrait ce même rayon si l'indice n' du deuxième prisme n'était plus identique à celui du premier ? Tracer approximativement la marche du rayon à travers les deux prismes avec $n' > n$. Dans le cas où $n' = \frac{3}{2}$ comment doit-on modifier l'angle du deuxième prisme (accolé au premier) pour que l'angle du rayon émergent avec la face de sortie soit le même que dans le 3° ?

(A. O. F.)

1° Le faisceau est limité par le rayon rasant S_1I et par le rayon S_2I normal à la face Ax (fig. 1).

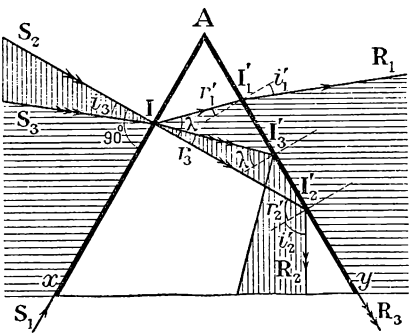


Fig. 1.

Le rayon S_1I se réfracte suivant la droite II'_1, qui forme, avec la normale IN, un angle r_1 égal, par définition, à l'angle limite λ correspondant aux milieux air-verre.

Cet angle limite est donné par la formule

$$\sin 90^\circ = n \sin \lambda,$$

ou

$$\sin \lambda = \frac{1}{n}.$$

Le rayon II'_1 tombe sur la deuxième face sous une incidence r_1, qui peut être calculée à partir de la troisième formule du prisme :

$$r'_1 = A - r_1 = A - \lambda.$$

L'angle d'émergence i'_1 est donné par la deuxième formule du prisme :

$$\sin i'_1 = n \sin r_1'$$

ou

$$\sin i'_1 = n \sin (A - \lambda). \qquad (1)$$

Application numérique :

$$n = \sqrt{2}, \quad A = 60^\circ.$$

$$\sin \lambda = \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lambda = 45^\circ.$$

$$r'_1 = A - \lambda = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

$$\sin i'_1 = \sqrt{2} \sin 15^\circ = 1{,}414 \times 0{,}258\,8 = 0{,}365\,9.$$

La table des lignes trigonométriques naturelles donne

$$i'_1 = 21^\circ 28'.$$

Le rayon S_2I traverse la face Ax sans subir de déviation. Il tombe sur la face Ay sous une incidence r'_2 égale à 60°. L'angle r'_2 étant supérieur à l'angle limite λ, le rayon se réfléchit totalement sur Ay.

Dans l'angle S_1IS_2, il existe donc un rayon incident S_3I qui correspond à un rayon réfracté rasant I'_3R_3.

Le rayon arrive sur la face Ay sous une incidence $r'_3 = \lambda$. L'angle r_3 est donc égal à $A - \lambda$ et l'angle d'incidence i_3 qui lui correspond est donné par la formule

$$\sin i_3 = n \sin r_3 = n \sin (A - \lambda). \qquad (2)$$

Les seconds membres des équations (1) et (2) étant identiques, les premiers membres le sont également.

D'où

$$i_3 = i'_1.$$

Ce résultat est une conséquence du principe du retour inverse de la lumière.

Il en résulte que les rayons incidents compris dans l'angle S_2IS_3 sont réfléchis totalement par la face Ay (hachures verticales).

Les rayons incidents compris dans l'angle S_1IS_3 émergent du prisme par la face Ay (hachures horizontales).

2° Nous supposons connu le résultat suivant : lorsque le prisme est au minimum de déviation pour une radiation donnée, les angles d'incidence i et d'émergence i' sont égaux. Il en est de même des angles r et r' (fig. 2). La droite II' est donc perpendiculaire à la bissectrice de l'angle A et par suite

$$r = r' = \frac{A}{2}.$$

L'angle $i = i'$ est donné par la formule

$$\sin i = n \sin r = n \sin \frac{A}{2}. \qquad (3)$$

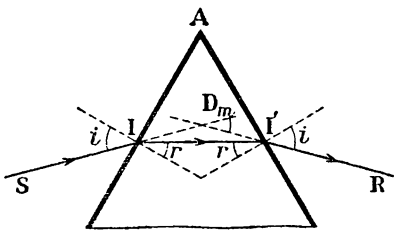


Fig. 2.

La déviation D a la valeur D_m donnée par la quatrième formule du prisme :

$$D_m = i + i' - A = 2i - A.$$

Nous en tirons

$$i = \frac{D_m + A}{2}$$

et, en portant cette valeur dans l'équation (3),

$$\sin \frac{D_m + A}{2} = n \sin \frac{A}{2}, \qquad (4)$$

relation donnant la déviation minimale, D_m, en fonction de n et de A.

Application numérique : $n = \sqrt{2}$, $\sin \frac{A}{2} = \sin \frac{60^\circ}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\sin i = \sin \frac{D_m + 60^\circ}{2} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2};$$

d'où

$$i = \frac{D_m + 60^\circ}{2} = 45^\circ, \quad D_m + 60^\circ = 90^\circ,$$

$$\mathbf{D_m = 30^\circ.}$$

3° Lorsque les deux prismes de même indice sont accolés comme l'indique la figure, ils forment une lame à faces parallèles (fig. 3). Les angles r et r' sont égaux comme alternes-internes. Les angles i et i' sont donc égaux : le rayon émergent I'R est parallèle au rayon incident SI.

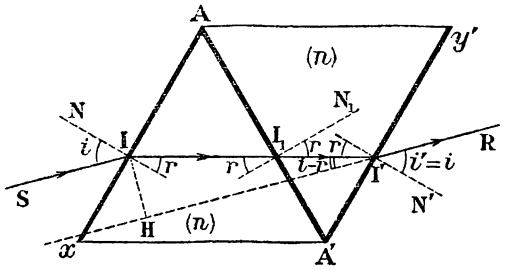


Fig. 3.

La traversée de la lame, formée par le système des deux prismes, fait subir au rayon lumineux un déplacement latéral IH. Considérons le triangle II'H; nous pouvons écrire

$$IH = II' \sin II'H = II' \sin (i - r).$$

Or $$II' = II_1 + I_1I' = AI_1 + I_1A' = AA'$$

($r = 30°$: triangles AII_1 et $A'I_1I'$ équilatéraux).

$$IH = AA' \sin (i - r).$$

Application numérique : $AA' = 5$ cm, $i = 45°$, $r = 30°$.

$$IH = 5 \sin 15° = 5 \times 0{,}258\,8,$$

$$\mathbf{IH = 1{,}294\ cm.}$$

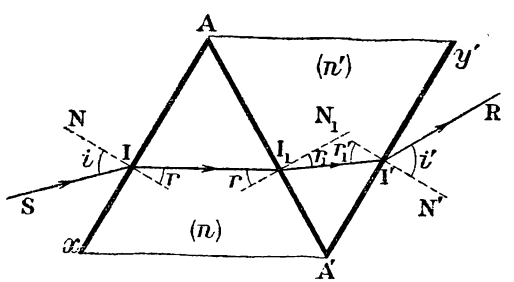


Fig. 4.

4° Si l'indice n' du prisme A' est supérieur à l'indice n, le rayon II_1 se réfracte en I_1 en formant un angle $r_1 < r$ avec la normale I_1N_1 (fig. 4). Cet angle est donné par la loi de Descartes généralisée,

$$n \sin r = n' \sin r_1,$$

ou $$\sin r_1 = \frac{n}{n'} \sin r. \qquad (5)$$

I_1I' tombe donc sur la face $A'y'$ sous une incidence $r'_1 = A' - r_1$ et émerge suivant la droite I'R qui forme, avec la normale I'N', l'angle i' tel que

$$\sin i' = n' \sin r'_1 = n' \sin (A' - r_1). \qquad (6)$$

Si nous supposons $n' = \frac{3}{2}$, l'angle d'émergence i' est égal à 45° (angle d'émergence du rayon dans la troisième question) ; l'angle A' sera donné par le système des deux équations

$$\sin r_1 = \frac{n}{n'} \sin r,$$
$$\sin i' = n' \sin (A' - r_1).$$

Application numérique : $n = \sqrt{2}$, $n' = \frac{3}{2}$, $r = 30°$.

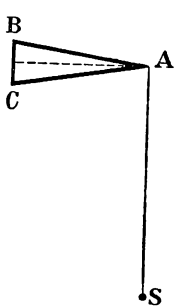
$$\sin r_1 = \sqrt{2} \times \frac{2}{3} \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0{,}4714.$$

La table des lignes trigonométriques naturelles donne

$$r_1 = 28° 7'.$$

$$\sin 45° = \frac{3}{2} \sin (A' - 28° 7'),$$
$$\sin (A' - 28° 7') = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3} = 0{,}4714,$$
$$A' - 28° 7' = 28° 7',$$
$$\mathbf{A' = 56° 14'.}$$

14. — Etude d'un prisme de petit angle dont l'une des faces est argentée.



Un petit prisme en verre dont l'indice de réfraction est $\frac{3}{2}$ a pour section principale un triangle isocèle BAC dont la base BC mesure 2,5 mm et la hauteur 5 cm ; il reçoit des rayons issus d'un point lumineux S situé à 4 m de A sur la normale au plan bissecteur du prisme passant par A.

1° Que deviennent les rayons partis de S, tombant sur le prisme tout près de A, après avoir traversé le prisme ?

2° Que verra un observateur regardant le point S au travers du prisme ?

3° On place tout contre la face AB du prisme un miroir plan qui renvoie la lumière vers le prisme.

a) Que deviennent les rayons qui, partis de S, ont traversé le prisme, se sont réfléchis sur le miroir et ont traversé à nouveau le prisme ?

b) Où faudrait-il placer l'œil pour voir l'image de S formée par ces rayons ?

(Dijon.)

1° Les rayons issus de S subissent une déviation à travers le prisme. Pour déterminer cette dernière, il faut, au préalable, calculer l'angle A du prisme.

Soit AM la bissectrice de l'angle A (fig. 1). En considérant le triangle MAC, nous pouvons écrire la relation

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{CM}{AM},$$

relation qui donne l'angle A.

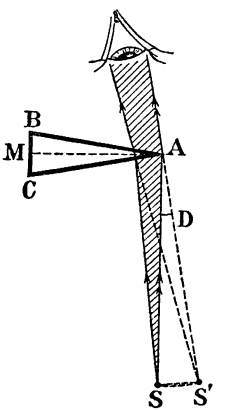


Fig. 1.

Numériquement :

$$CM = \frac{BC}{2} = \frac{2{,}5}{2}\ \text{mm},$$

$$AM = 5\ \text{cm} \quad \text{ou} \quad 50\ \text{mm}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{2{,}5}{2 \times 50} = 0{,}025.$$

Cette tangente étant celle d'un petit angle, nous pourrons la confondre avec l'angle exprimé en radians :

$$\frac{\widehat{A}}{2} = 0{,}025,$$

$$\widehat{A} = 0{,}05 \text{ radian}.$$

En degrés :
$$\widehat{A} = \frac{0{,}05 \times 180}{\pi},$$

$$\widehat{A} = 2^\circ\, 52'.$$

Considérons un faisceau de rayons issus de S et situés dans le plan de la section principale du prisme.

Ces rayons tombent tout près de A : ils sont donc sensiblement normaux à AM et par suite à AC puisque l'angle $MAC = \frac{A}{2}$ est petit. L'angle d'incidence *i* est donc un petit angle pour tous les rayons incidents. Il en est de même de l'angle *r*, inférieur à *i*.

L'angle $r' = A - r$ est également un petit angle ainsi que l'angle d'émergence i'. Dans les deux premières formules du prisme, on peut confondre les sinus et les angles. La déviation D d'un rayon quelconque est donnée par le système

$$\begin{aligned} i &= nr, \\ i' &= nr', \\ A &= r + r', \\ D &= i + i' - A. \end{aligned}$$

Nous tirons de ces équations

$$D = (n - 1)\ A.$$

L'expression précédente ne renferme pas l'angle d'incidence i : tous les rayons issus de S sont donc également déviés par le prisme, dans les conditions précisées par l'énoncé.

Numériquement : $n = \frac{3}{2}$, $A = 0{,}05$ radian.

$$D = \left(\frac{3}{2} - 1\right) 0{,}05 = 0{,}025 \text{ radian},$$

$$\mathbf{D = 1^o\,26'.}$$

2° Les rayons issus de S tombent, par hypothèse, tout près du sommet A du prisme : on peut donc négliger l'épaisseur de verre qu'ils traversent.

Nous avons vu, d'autre part, que ces rayons sont également déviés par le prisme.

On démontre que, dans ces conditions, les rayons émergents passent, en première approximation, par un même point, S' ; le prisme est un système optique stigmatique pour le point S. Le point S' est l'image virtuelle de l'objet réel S. C'est cette image que l'observateur apercevra s'il regarde le point S à travers le prisme (fig. 1).

Pour en déterminer la position, observons que le rayon SA subit une rotation de l'angle D autour du point A. Le point S' se trouve sur l'arc de cercle de centre A et de rayon AS, à une distance de S donnée par l'expression

$$\overset{\frown}{SS'} = AS \times D.$$

L'angle D étant petit, on peut confondre la corde et l'arc et écrire

$$SS' = AS \times D.$$

Numériquement : AS = 4 m ou 400 cm, D = 0,025 radian.

$$SS' = 400 \times 0{,}025,$$

$$\mathbf{SS' = 10\ cm.}$$

3° *a*) Le prisme donne du point objet S (fig. 2) une image virtuelle, S′ (première image intermédiaire). Cette image joue le rôle d'objet réel pour le miroir, qui en donne une image virtuelle, S″ (deuxième image intermédiaire). S″ joue le rôle d'objet réel pour le prisme, qui en donne une image virtuelle, S_1 (image finale).

Tout rayon issu de S passe donc successivement :

— par le point S′, après avoir traversé le prisme;

— par le point S″, après s'être réfléchi sur le miroir;

— par le point S_1, après avoir traversé une seconde fois le prisme.

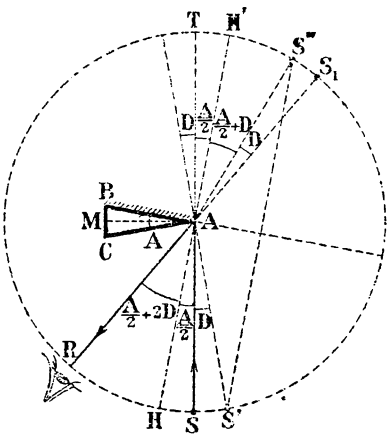


FIG. 2.

Le système prisme-miroir est donc stigmatique pour le point S dans les conditions données par l'énoncé.

Pour déterminer la marche des rayons, il suffit de préciser la position des images S′, S″ et S_1.

Remarquons tout d'abord que, si nous admettons que l'épaisseur de verre traversée est très faible, les trois images sont sur le cercle de centre A et de rayon AS.

L'image S′ est située au point d'intersection de ce cercle et de la droite AS′ telle que $\widehat{SAS'} = D$.

L'image S″ est symétrique de S′ par rapport au miroir. Si nous traçons la normale HH′ à celui-ci au point A, les angles HAS et MAB sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Nous pouvons donc écrire

$$\widehat{H'AS''} = \widehat{HAS'} = \frac{A}{2} + D.$$

L'image S_1 est située au point d'intersection du cercle et de la droite AS_1 telle que $\widehat{S'AS_1} = D$. Nous pouvons donc écrire

$$\widehat{H'AS_1} = \frac{A}{2} + D + D = \frac{A}{2} + 2D.$$

Prolongeons la droite S_1A. Nous obtenons la droite AR, qui forme, avec le rayon incident SA, l'angle α donné par l'expression

$$\alpha = \widehat{RAS} = \widehat{RAH} + \widehat{HAS} = \frac{A}{2} + 2D + \frac{A}{2} = A + 2D,$$

$$\alpha = A + 2(n - 1)A = (2n - 1)A. \qquad (1)$$

Tous les rayons issus de S émergent donc en passant par le point S_1 situé à l'intersection de la droite RA, définie par l'angle $RAS = \alpha$, et du cercle de centre A et de rayon AS.

Numériquement : $A = 0{,}05$ radian, $n = \frac{3}{2}$.

$$\alpha = \left(2 \times \frac{3}{2} - 1\right) \times 0{,}05 = 2 \times 0{,}05 = 0{,}1 \text{ radian},$$

$$\alpha = 5^\circ 44'.$$

b) Pour voir l'image S_1 de S donnée par le système prisme-miroir l'œil doit se placer en R et viser dans la direction RA.

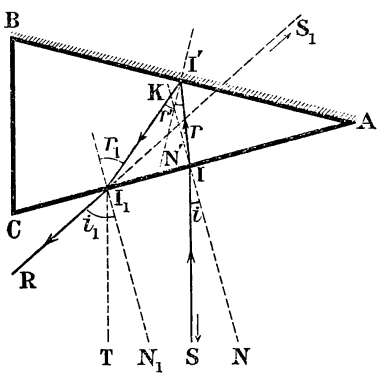


FIG. 3.

Autre solution du 3°.

La droite RA peut être considérée comme le rayon émergent correspondant au rayon incident SA. Nous obtiendrons sa direction en suivant la marche du rayon SA à travers le système

Considérons, plus généralement, le rayon incident SI faisant avec la normale, IN, l'angle d'incidence i supposé très petit. Ce rayon se réfracte suivant la droite II', qui fait avec IN' l'angle r tel que $i = nr$. II' tombe sur la face AB en I', sous un angle d'incidence r' donné par la deuxième formule du prisme $A = r + r'$, d'où $r' = A - r$ (fig. 3).

II' se réfléchit sur le miroir suivant la droite $I'I_1$, qui forme avec la normale à la face AC l'angle r_1. Les angles r_1 et IKI_1 sont égaux comme

alternes-internes et l'angle IKI_1, extérieur au triangle KII', est égal à la somme des deux angles qui ne lui sont pas adjacents :

$$r_1 = \widehat{IKI_1} = 2r' + r = 2(A - r) + r = 2A - r.$$

Le rayon II_1 se réfracte en I_1 et émerge en faisant avec la normale I_1N_1 l'angle i_1 tel que $i_1 = nr_1$, ou

$$i_1 = n(2A - r) = 2An - nr = 2An - i.$$

Le rayon émergent I_1R forme avec la rayon incident SI un angle $\alpha = \widehat{RI_1T}$ (I_1T parallèle à IS).

La figure 3 donne immédiatement

$$\alpha = i_1 - i = 2An - 2i = 2(An - i).$$

Si nous admettons que le système est stigmatique pour le point S, tous les rayons émergents passent par un même point S_1 quel que soit l'angle d'incidence i.

Si nous considérons en particulier le rayon SA tel que $i = \frac{A}{2}$, le rayon émergent correspondant forme avec le rayon incident SA l'angle α donné par l'expression

$$\alpha = 2\left(An - \frac{A}{2}\right) = 2An - A = (2n - 1)A.$$

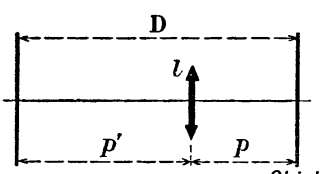
Nous retrouvons l'expression (1).

CHAPITRE V

Lentilles. Construction géométrique des images. Formules de Descartes.

15. — Image réelle d'un objet réel donnée par une lentille convergente.

Une lentille simple l de 10 cm de distance focale projette sur un écran une image réelle d'un objet plan. On désignera par p et p' les distances du plan de l'objet et de celui de l'image au centre optique de la lentille, par D la distance de ces deux plans ($D = p + p'$) et par γ le grandissement, rapport des dimensions linéaires de l'image à celles de l'objet.



1° La distance p étant égale à 12,5 cm, calculer p' et γ.

2° Quelles doivent être les valeurs de p et p' pour que γ soit égal à 3 ?

3° On suppose que la distance D puisse varier entre 40 et 121 cm ; calculer les valeurs de p, p' et γ dans ces deux cas extrêmes.

4° On veut obtenir un grandissement de 24 avec une distance D égale à 100 cm en remplaçant la lentille l par une autre de plus faible distance focale f ; calculer p, p' et f.

(Sénégal.)

Nous désignerons par AB la trace de l'objet dans le plan de la section principale de la lentille. Les grandeurs p, p' et γ seront prises en valeur absolue, comme l'indique l'énoncé. Les relations existant entre ces grandeurs seront déduites de la construction géométrique de l'image de l'objet.

1° *Construction géométrique de l'image.*

Suivons la marche de deux rayons incidents issus de l'extrémité A de l'objet :

— le rayon AC, passant par le centre optique de la lentille, se réfracte sans subir de déviation;

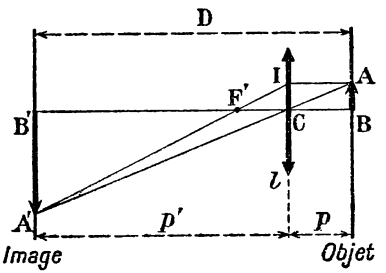
— le rayon AI, parallèle à l'axe optique, se réfracte suivant la droite IF', passant par le foyer principal image de la lentille.

Les deux rayons réfractés se coupent au point A', image réelle du point A. La trace de l'image de l'objet, dans le plan de la section principale, est la droite A'B', perpendiculaire à l'axe.

Relations fondamentales entre p, p' et γ.

Les triangles ACB et A'CB' étant semblables, nous avons la relation

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{CB'}{CB} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{p'}{p}. \tag{1}$$



Les triangles ICF' et F'A'B' étant semblables, nous avons la relation

$$\frac{A'B'}{IC} = \frac{F'B'}{CF'} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{p'-f}{f}.$$

En égalant les deux expressions de γ, il vient

$$\frac{p'}{p} = \frac{p'-f}{f},$$

d'où nous tirons la formule connue

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. \tag{2}$$

Calcul de p' et de γ.

Nous connaissons p et f. Les formules (1) et (2) forment un système de deux équations, qui nous permettent de calculer les inconnues p' et γ.

De (2), nous tirons $\qquad p' = \dfrac{pf}{p-f}$

En portant cette valeur dans (1),

$$\gamma = \frac{f}{p - f}.$$

Application numérique : $p = 12{,}5$ cm, $f = 10$ cm.

$$p' = \frac{12{,}5 \times 10}{12{,}5 - 10}, \qquad p' = \mathbf{50\ cm.}$$

$$\gamma = \frac{10}{12{,}5 - 10}, \qquad \gamma = \mathbf{4.}$$

2° Dans les équations (1) et (2), nous connaissons γ et f. Nous en déduisons immédiatement

$$p = \frac{f(\gamma + 1)}{\gamma} \quad \text{et} \quad p' = f(\gamma + 1).$$

Application numérique : $\gamma = 3$, $f = 10$ cm.

$$p = \frac{10(3 + 1)}{3} = \frac{40}{3}, \qquad p = \mathbf{13{,}33\ cm.}$$

$$p' = 10(3 + 1), \qquad p' = \mathbf{40\ cm.}$$

3° Nous connaissons D et f. Les inconnues p, p' et γ seront données par le système d'équations

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{p'}{p}, \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{f}, \\ p + p' = \mathrm{D}. \end{cases} \tag{3}$$

En portant dans la seconde équation la valeur de p' tirée de la troisième, il vient

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\mathrm{D} - p} = \frac{1}{f}.$$

Cette équation devient, après simplification,

$$p^2 - p\mathrm{D} + \mathrm{D}f = 0. \tag{4}$$

La distance p est donnée par une équation du second degré. Cette équation a des racines si

$$\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D}f \geqslant 0,$$

ou

$$\mathrm{D}(\mathrm{D} - 4f) \geqslant 0.$$

La distance D étant toujours positive, cette inégalité est satisfaite si

$$D \geqslant 4f.$$

Si $D = 4f$, l'équation a une racine double.

Connaissant p, nous tirons p' de la troisième équation et γ de la première.

Application numérique.

Nous remarquerons que $4f = 40$ cm. Si l'on a

$$40 \text{ cm} \leqslant D \leqslant 121 \text{ cm},$$

la condition d'existence des racines est remplie.

a) $D = 40$ cm.

L'équation (4) a une racine double :

$$p = p' = \mathbf{20\ cm},$$

correspondant à $\gamma = 1$.

La lentille est au milieu de la distance D et l'image égale à l'objet.

b) $D = 121$ cm.

L'équation (4) devient

$$p^2 - 121\,p + 1210 = 0.$$

Nous en tirons

$$p = \frac{121 \pm 99}{2}.$$

Le problème comporte deux solutions.

$$p = \mathbf{110\ cm}, \quad p' = \mathbf{11\ cm} \quad \text{et} \quad \gamma = \mathbf{1/10},$$
$$p = \mathbf{11\ cm}, \quad p' = \mathbf{110\ cm} \quad \text{et} \quad \gamma = \mathbf{10}.$$

L'existence de ces deux solutions est une conséquence du principe du retour inverse de la lumière.

4° Nous connaissons cette fois γ et D. Le système d'équations (3) nous permet le calcul des inconnues p, p' et f. Nous en tirons aisément

$$p = \frac{D}{\gamma + 1}, \quad p' = D\,\frac{\gamma}{\gamma + 1}, \quad f = D\,\frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2}.$$

Application numérique : $D = 100$ cm, $\gamma = 24$.

$$p = \frac{100}{25}, \qquad p = 4 \text{ cm},$$

$$p' = 100 \times \frac{24}{25}, \qquad p' = 96 \text{ cm},$$

$$f = 100 \times \frac{24}{25^2}, \qquad f = 3{,}84 \text{ cm}.$$

16. — Détermination de la distance focale d'une lentille donnant d'un objet (réel ou virtuel) une image de grandeur donnée.

1° On veut obtenir d'un objet lumineux rectiligne AB une image réelle A'B' huit fois plus grande et projetée sur un écran E éloigné de 5 m de AB. La droite AA' est perpendiculaire à AB et à l'écran.

Calculer la position et la distance focale de la lentille convergente qui permet d'obtenir ce résultat.

2° Montrer que si AB, au lieu d'être une source de lumière, est une image réelle formée par un dispositif antérieur, on peut employer une lentille divergente de position et de distance focale convenables, que l'on calculera.

Dans les réponses, les longueurs seront exprimées en millimètres.

(Aix-Marseille.)

Nous supposons connues les formules de Descartes avec les conventions de signe habituelles[1].

1° Pour obtenir de l'objet réel AB une image réelle, à l'aide d'une lentille convergente, il faut placer cette dernière entre l'objet et l'écran, à une distance de l'objet supérieure à sa distance focale f. L'image est alors renversée par rapport à l'objet et, par suite, le grandissement linéaire γ est négatif.

Si nous désignons par D la valeur absolue de la distance de l'objet à l'écran et par p et p' les distances à la lentille de l'objet AB et de son image A'B', nous pouvons écrire

$$D = |p| + |p'|.$$

Comme p et p' sont tous deux positifs, avec la convention de signe habituelle, cette relation peut également s'écrire

$$D = p + p'. \qquad (1)$$

---

1. Objet réel $p > 0$, objet virtuel $p < 0$; image réelle $p' > 0$, image virtuelle $p' < 0$; image droite par rapport à l'objet $\gamma > 0$; image renversée par rapport à l'objet $\gamma < 0$.

Lentille convergente $f > 0$, divergente $f < 0$.

D'autre part, entre p, p' et f, nous avons les deux relations de Descartes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}, \tag{2}$$

$$\gamma = -\frac{p'}{p} \tag{3}$$

Les grandeurs D et γ étant connues, nous tirons des trois équations précédentes les inconnues p, p' et f.

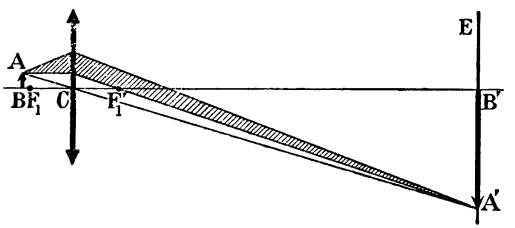


Fig. 1.

Portons dans l'équation (1) la valeur de p' tirée de (3),

$$p' = -\gamma p;$$

nous obtenons $$D = p - \gamma p,$$

d'où $$p = \frac{D}{1-\gamma},$$

et par suite $$p' = -\gamma p = -\frac{\gamma D}{1-\gamma}.$$

Portons ces valeurs de p et p' dans l'équation (2) :

$$\frac{1}{f} = \frac{1-\gamma}{D} - \frac{1-\gamma}{\gamma D},$$

$$f = -\frac{\gamma D}{(1-\gamma)^2}.$$

Application numérique :

$$D = 5 \text{ m}, \quad \gamma = -8.$$

$$p = \frac{5}{1+8} = \frac{5}{9} \text{ m}, \qquad p = \mathbf{555 \text{ mm}},$$

$$f = -\frac{(-8) \times 5}{(1+8)^2} = \frac{40}{81} \text{ m}, \qquad f = \mathbf{494 \text{ mm}}.$$

2° Pour obtenir d'un objet AB une image réelle, à l'aide d'une lentille divergente, on placera l'objet entre la lentille et son foyer principal objet. L'objet AB est alors virtuel, et ne peut être que l'image réelle d'un objet fourni par un dispositif antérieur.

L'image est droite par rapport à l'objet et le grandissement linéaire γ est positif.

La lentille étant placée avant cet objet virtuel, nous avons entre les grandeurs D, p et p' la relation

$$D = |p'| - |p|.$$

Mais $p' > 0$ et $p < 0$.

La relation précédente peut s'écrire

$$D = p + p'.$$

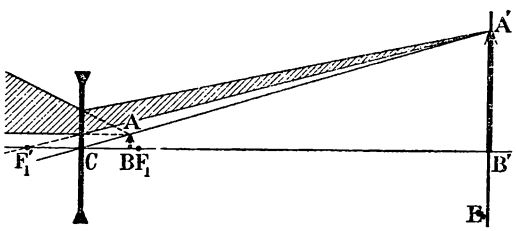


Fig. 2.

Le système d'équations est donc identique au précédent et nous avons

$$p = \frac{D}{1 - \gamma},$$

$$f = -\frac{\gamma D}{(1 - \gamma)^2}.$$

Application numérique : $D = 5$ m, $\gamma = +8$.

$$p = \frac{5}{1 - 8} = -\frac{5}{7}\text{ m}, \qquad p = -714\text{ mm}.$$

$$f = -\frac{8 \times 5}{(1 - 8)^2} = -\frac{40}{49}\text{ m}, \qquad f = -816\text{ mm}.$$

Les figures 1 et 2 nous montrent la marche d'un pinceau de rayons dans les deux cas.

17. — Système composé de deux lentilles convergentes de même distance focale f distantes l'une de l'autre de f.

Deux lentilles minces ont la même distance focale $f = 50$ cm; elles ont le même axe optique et sont distantes l'une de l'autre de f.

1° Construire, à travers le système, l'image d'un objet situé à 1 m en avant de la première lentille.

2° Calculer la position de cette image et le rapport des dimensions de l'image et de l'objet.

3° Laissant l'objet et l'écran d'observation fixes, on enlève les deux lentilles. En quelle position doit-on placer une lentille unique pour que l'image ne soit pas modifiée ? Quelle serait sa distance focale ?

(Clermont.)

1° Représentons l'objet par une droite AB, perpendiculaire à l'axe optique du système, et suivons la marche de deux rayons incidents particuliers issus de A (fig. 1).

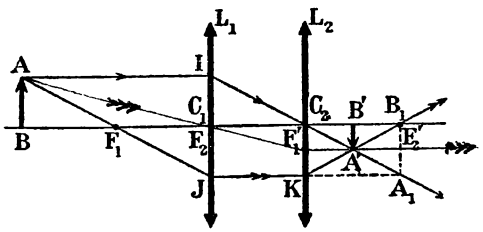


Fig. 1.

Le rayon AI, parallèle à l'axe, est réfracté par la première lentille L_1 suivant la droite IC_2 (C_2 confondu avec F'_1) et traverse la lentille L_2 sans subir de déviation.

Le rayon AJ, passant par le foyer principal objet de L_1, est réfracté par la première lentille parallèlement à l'axe et émerge de L_2 suivant la droite KF'_2.

Le point d'intersection A′ des deux rayons émergents est l'image du point A. La perpendiculaire A′B′ à l'axe est l'image de l'objet AB.

2° Nous déduirons tous les résultats de la construction précédente, sans utiliser les formules des lentilles.

AB est à la distance $2f$ de la lentille L_1. Le foyer principal F_1 est situé au milieu de la droite C_1B et la distance JC_1 est égale à AB. Il en résulte que $KC_2 = AB$.

L'image intermédiaire, A_1B_1, de AB donnée par la lentille L_1 est égale à l'objet et située dans le plan focal image de L_2. Dans le rectangle $A_1B_1C_2K$, le point A′ est le point de rencontre des diagonales. Le point B′ se trouve au milieu de C_2B_1. La distance de l'objet AB à l'image finale A′B′ est donc

$$BB' = BC_1 + C_1C_2 + C_2B' = 2f + f + \frac{f}{2},$$

$$BB' = \frac{7f}{2}.$$

Numériquement : $$BB' = \frac{7 \times 50}{2},$$

$$\mathbf{BB' = 175\ cm.}$$

D'autre part $$A'B' = \frac{KC_2}{2} = \frac{AB}{2},$$

$$\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

3° Nous pouvons déterminer géométriquement la position du centre optique C et du foyer principal image de la lentille unique L qui donnerait la même image.

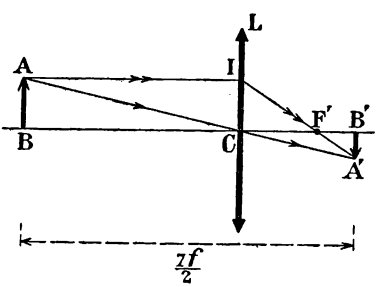


Fig. 2.

Soit AB et A′B′ (fig. 2) l'objet et l'image séparés par la distance $BB' = \frac{7f}{2}$.

Tous les rayons issus de A doivent passer par le point image A′ après réfraction par le système.

Joignons A et A′. Cette droite rencontre l'axe en un point C, qui est le centre optique de la lentille L. En effet, si nous plaçons en ce point la lentille L, perpendiculairement à la droite BB′, la droite CA′ représente le rayon réfracté correspondant au rayon incident AC.

Menons par le point A la parallèle AI à l'axe principal de la lentille. Ce rayon se réfracte en passant par le point image A'. Le rayon réfracté rencontre l'axe en un point F' qui est, par définition, le foyer principal image de la lentille L.

Calcul de CB *et de* $CF' = f'$.

Les triangles ABC et A'B'C étant semblables, nous avons les relations

$$\frac{CB'}{CB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2},$$

Par ailleurs nous pouvons écrire

$$CB + CB' = \frac{7f}{2}.$$

Des deux relations précédentes nous tirons

$$\frac{CB' + CB}{CB} = \frac{1 + 2}{2},$$

ou

$$\frac{7f}{2CB} = \frac{3}{2},$$

$$CB = \frac{7f}{3}.$$

Numériquement : $f = 50$ cm.

$$CB = \frac{7 \times 50}{3}, \qquad \mathbf{CB = 116{,}6\ cm.}$$

Les triangles A'B'F' et ICF' étant semblables, nous avons la relation

$$\frac{F'B'}{CF'} = \frac{A'B'}{IC} = \frac{1}{2},$$

ou

$$\frac{CB' - f'}{f'} = \frac{1}{2}.$$

Mais

$$CB' = BB' - CB = \frac{7f}{2} - \frac{7f}{3} = \frac{7f}{6}.$$

D'où

$$2\left(\frac{7f}{6} - f'\right) = f,'$$

$$3f' = \frac{14f}{6},$$

$$f' = \frac{7f}{9}.$$

Numériquement :

$$f' = \frac{350}{9}, \qquad \mathbf{f' = 38{,}8\ cm.}$$

18. — Système de deux lentilles convergentes de même axe.

Deux lentilles convergentes minces, de 15 cm de distance focale et dont les axes coïncident, sont disposées à 10 cm l'une de l'autre.

1° A quelle distance de la seconde lentille converge un faisceau parallèle à l'axe qui tombe sur la première ?

2° A quelle distance de la seconde lentille doit-on placer un écran pour qu'un objet situé à 4 cm en avant de la première lentille donne sur cet écran une image réelle ?

3° Quel est le grandissement de cette image ? Est-elle droite ou renversée ?

(Nancy.)

Nous supposons connues les formules de Descartes, avec les conventions de signe habituelles.

1° Désignons par L_1 et L_2 les deux lentilles, par f leur distance focale commune et par d la valeur absolue de la distance de leurs centres optiques, C_1 et C_2.

Le faisceau de lumière parallèle à l'axe est réfracté par la lentille L_1 et converge en son foyer principal image, F'_1, qui peut être considéré comme l'image réelle d'un point lumineux situé à l'infini sur l'axe.

La distance f étant supérieure à la distance d, le point F'_1 joue, pour la lentille L_2, le rôle d'objet virtuel.

Sa distance à la lentille, égale à $f - d$ en valeur absolue, a pour valeur algébrique

$$p = -(f - d) = d - f.$$

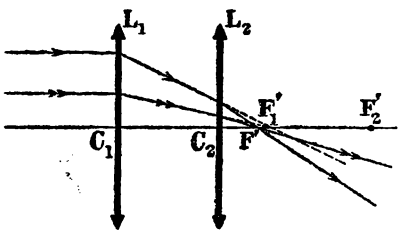


Fig. 1.

La lentille L_2 en donne une image F', à la distance p' telle que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

ou

$$\frac{1}{d-f} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}.$$

Nous en tirons

$$p' = \frac{(d-f)f}{d-2f}.$$

Le point F' peut être considéré comme le foyer image du système des deux lentilles.

Application numérique : $d = 10$ cm, $f = +15$ cm (lentille convergente).

$$p' = \frac{(10-15)\times 15}{10-30},$$

$$p' = \mathbf{3{,}75\ cm.}$$

p' étant positif, le point image F' est réel.

2° Représentons l'objet par la droite AB, perpendiculaire à l'axe. La lentille L_1 donne de cet objet, situé à la distance p de son centre optique, une image A_1B_1 située à la distance p_1 telle que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Cette image est à la distance $p_2 = d - p_1$, comptée algébriquement, de la lentille L_2.

Elle joue, pour cette lentille, le rôle d'objet réel si $p_2 > 0$ et d'objet virtuel si $p_2 < 0$.

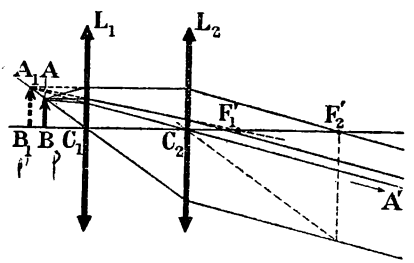


Fig. 2.

La lentille L_2 en donne une image A'B', à la distance p' telle que

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

ou

$$\frac{1}{d-p_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}. \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) peuvent être écrites ainsi :

$$p_1 = \frac{pf}{p-f},$$

et

$$p' = \frac{(d-p_1)f}{d-p_1-f}.$$

Elles nous donnent, sous cette forme, la position de l'image intermédiaire, A_1B_1, et celle de l'image finale, $A'B'$.

Application numérique :

$f = 15$ cm, $d = 10$ cm, $p = +4$ cm (objet réel).

$$p_1 = \frac{4 \times 15}{4-15}, \qquad p_1 = -\frac{60}{11} \text{ cm}.$$

L'image A_1B_1 est virtuelle et joue le rôle d'objet réel pour la lentille L_2.

$$p' = \frac{\left(10 + \frac{60}{11}\right)15}{10 + \frac{60}{11} - 15} = \frac{170 \times 15}{60-55},$$

$$p' = +\mathbf{510\ cm}.$$

L'image finale $A'B'$ est réelle, comme l'indique l'énoncé. L'écran doit être placé à 510 cm derrière la lentille L_2 pour la recevoir.

3° Le grandissement linéaire du système est défini par le rapport

$$|\gamma| = \frac{A'B'}{AB}.$$

Nous pouvons écrire ce dernier sous la forme suivante :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} \times \frac{A'B'}{A_1B_1}.$$

Si nous appelons γ_1 et γ_2 les grandissements linéaires correspondant aux deux lentilles, la relation précédente peut être écrite ainsi

$$|\gamma| = |\gamma_1| \times |\gamma_2|.$$

Cette relation est également vraie si nous considérons les valeurs algébriques des grandissements linéaires :

$$\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2.$$

D'où

$$\gamma = \left(-\frac{p_1}{p}\right)\left(-\frac{p'}{p_2}\right) = \frac{p_1p'}{p(d-p_1)}.$$

Si $\gamma > 0$, l'image est droite par rapport à l'objet.
Si $\gamma < 0$, elle est renversée.

Application numérique :

$$p_1 = -\frac{60}{11}\text{ cm}, \quad p' = +510\text{ cm}, \quad p = +4\text{ cm}, \quad d = 10\text{ cm}.$$

$$\gamma = \frac{\left(-\frac{60}{11}\right)(+510)}{4\left(10 + \frac{60}{11}\right)},$$

$$\gamma = -45.$$

Le grandissement linéaire γ est négatif : l'image A'B' est renversée par rapport à l'objet.

19. — Principe du téléobjectif.

Une lentille convergente, L, a une distance focale $f = 6$ cm.

1° Un objet dont la hauteur est 10 m est placé à 1 km en avant de la lentille. Quelle est la hauteur de l'image ?

2° Entre la lentille précédente et son foyer image, on place une lentille divergente, L', dont la distance focale est f' et de même axe que L. La distance des deux lentilles est d.

A quelle condition doivent satisfaire f, f' et d pour que l'image définitive soit réelle ?

3° On a en particulier $f = 6$ cm, $f' = 3{,}5$ cm (en valeur absolue), $d = 3$ cm. Déterminer pour le même objet la position de l'image définitive et sa grandeur.

4° Quelle est la longueur totale de l'instrument comprise entre L et l'écran d'observation? Quelle serait la distance focale d'une lentille unique qui donnerait une image de même grandeur ?

(Clermont.

Nous supposerons, comme l'indique l'énoncé, que f, f' et d représentent les valeurs absolues des distances focales et de la distance des centres optiques des deux lentilles.

Nous assimilerons l'objet à une droite AB, perpendiculaire à l'axe optique du système et ayant son extrémité B sur cet axe.

1° L'objet est très éloigné de la lentille. Son diamètre apparent, α est donné par l'expression

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{BC};$$

α est un petit angle. Nous pouvons confondre la tangente avec l'angle :

$$\alpha \approx \frac{AB}{BC}.$$

Les rayons issus de B sont sensiblement parallèles à l'axe. Ils convergent, après réfraction, au foyer image F_1 de la lentille L. L'image B_1 de B se confond avec F_1.

De même, les rayons issus de A, situé sur l'axe secondaire AC, convergent sensiblement au foyer secondaire correspondant à cet axe. L'image A_1 de A se confond avec ce foyer secondaire. Elle est donc située à l'intersection de l'axe AC et du plan focal image de la lentille L.

En considérant le triangle A_1B_1C nous pouvons écrire

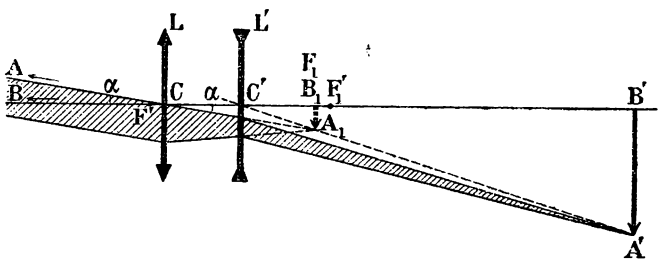
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1B_1}{CB_1} .$$

Nous en tirons

$$A_1B_1 = CB_1 \operatorname{tg} \alpha,$$

ou

$$A_1B_1 \approx f \times \alpha. \qquad (1)$$



Numériquement :

$$AB = 10 \text{ m}, \quad BC = 1 \text{ km ou } 1\,000 \text{ m}, \quad f = 6 \text{ cm}.$$

$$\alpha = \frac{10}{1\,000} = \frac{1}{100} \text{ radian},$$

$$A_1B_1 = 6 \times \frac{1}{100} = 0{,}06 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A_1B_1 = 0{,}6 \text{ mm}.}$$

Remarque.

Déterminons avec plus de précision la position et la grandeur de l'image A_1B_1 en appliquant les formules de Descartes.

La distance p_1 de l'image à la lentille L est donnée par l'expression

$$p_1 = \frac{pf}{p - f},$$

dans laquelle $f = 6$ cm et $p = +1$ km ou 10^5 cm.

Numériquement :

$$p_1 = \frac{10^5 \times 6}{10^5 - 6} = \frac{6}{1 - \frac{6}{10^5}} \approx 6\left(1 + \frac{6}{10^5}\right) \text{cm},$$

en limitant la division aux deux premiers termes.

Si nous prenons pour p_1 la valeur 6 cm adoptée précédemment nous commettons une erreur absolue $\Delta p_1 = \frac{6 \times 6}{10^5}$ cm et une erreur relative

$$\frac{\Delta p_1}{p_1} = \frac{6}{10^5} .$$

Le grandissement linéaire est

$$\left| \gamma \right| = \frac{p_1}{p} = \frac{6}{10^5}\left(1 + \frac{6}{10^5}\right),$$

d'où l'on tire

$$A_1B_1 = AB \times |\gamma|,$$

$$A_1B_1 = 1\,000 \times \frac{6}{10^5}\left(1 + \frac{6}{10^5}\right) = \frac{6}{10^2}\left(1 + \frac{6}{10^5}\right) \text{cm}.$$

Si nous prenons pour A_1B_1 la valeur 0,6 mm ou $\frac{6}{10^2}$ cm, nous commettons une erreur relative égale $\frac{6}{10^5}$.

L'approximation que nous avons faite est donc justifiée.

2° Pour que la lentille divergente L′ donne de A_1B_1 une image réelle, il faut que l'image A_1B_1 soit située entre le centre optique, C′, de cette lentille et son foyer principal objet F_1' : A_1B_1 joue alors le rôle d'objet virtuel.

La distance p de A_1B_1 à la lentille doit satisfaire à la relation

$$0 < |p| < f'.$$

Mais

$$|p| = f - d.$$

La condition précédente devient

$$0 < f - d < f',$$

inégalité équivalente à

$$-f' < d < f.$$

3° La distance p' de l'image A'B' à la lentille L' est donnée par la formule de position de Descartes (f étant pris en valeur absolue, nous devons écrire $-\frac{1}{f'}$ pour la lentille divergente)

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f'},$$

dans laquelle

$$|p| = f - d, \quad \text{ou} \quad p = -(f - d) \quad \text{(objet virtuel)}.$$

Nous en tirons

$$p' = \frac{f'(f-d)}{d-(f-f')}.$$

Le grandissement linéaire est

$$\gamma = -\frac{p'}{p} = \frac{f'}{d-(f-f')}$$

et la grandeur de l'image est

$$A'B' = A_1B_1 \times |\gamma|.$$

Remarquons que, si la condition $f - f' < d < f$ est remplie, la distance p' est positive : l'image A'B' est bien réelle.

Par ailleurs, le grandisssement linéaire est positif : l'image A'B' est droite par rapport à A_1B_1, donc renversée par rapport à l'objet.

Application numérique :

$f = 6$ cm, $f' = 3{,}5$ cm, $d = 3$ cm, $A_1B_1 = 0{,}6$ mm.

$$p' = \frac{3{,}5\,(6-3)}{3-(6-3{,}5)} = \frac{3{,}5 \times 3}{0{,}5}, \qquad p' = \mathbf{21\ cm.}$$

$$\gamma = \frac{3{,}5}{3-(6-3{,}5)}, \qquad \gamma = \mathbf{7.}$$

$$A'B' = 0{,}6 \times 7, \qquad \mathbf{A'B' = 4{,}2\ mm.}$$

4° La longueur totale de l'instrument est la distance CB'. L'examen de la figure permet d'écrire

$$CB' = CC' + C'B',$$
$$CB' = d + p'.$$

Numériquement :

$$CB' = 3 + 21,$$
$$\mathbf{CB' = 24\ cm.}$$

Une lentille unique, qui donnerait de l'objet AB une image de même grandeur (4,2 mm), aurait d'après la formule (1) une distance focale égale à $7f$ ou 42 cm.

La distance de la lentille à l'écran serait plus grande : l'instrument permettant d'obtenir cette image réelle serait plus encombrant.

Ce système de deux lentilles constitue le téléobjectif utilisé sur certains appareils photographiques.

20. — Système composé d'une lentille divergente et d'une lentille convergente de même axe, dont la distance est variable.

Une lentille biconcave de distance focale égale à 5 cm reçoit la lumière d'une petite droite perpendiculaire à l'axe principal, placée à 8 cm en avant de la lentille et de longueur égale à 1 cm.

Derrière cette lentille, dans la direction de la marche de la lumière, on dispose une lentille biconvexe de même axe principal et dont la distance focale est 20 cm. On demande de suivre la position de l'image donnée par le système des deux lentilles et d'étudier les variations de la grandeur de cette image quand la distance des verres change. — On examinera le cas particulier où cette distance est égale à 15 cm et l'on construira la marche des rayons qui donnent l'image définitive.

(Rennes.)

Le système optique se compose de deux lentilles de même axe :

— une lentille biconcave, donc divergente, L_1, dont la distance focale a pour valeur algébrique f_1, avec la convention de signe habituelle,

— une lentille biconvexe, donc convergente, L_2, dont la distance focale a pour valeur algébrique f_2.

La distance de ces lentilles est égale à d en valeur absolue.

Le système donne de la petite droite, que nous désignerons par AB, une image A'B' dont nous devons suivre la position et la grandeur quand la distance d varie. Il est indiqué d'exprimer :

1° la distance de l'image A'B' au système,

2° le grandissement linéaire,

en fonction de la distance d, en appliquant les formules de Descartes, et de discuter les expressions algébriques obtenues.

1° *Position de l'image.*

La lentille L_1 donne de la droite AB située à la distance p de son centre optique, une image A_1B_1 située à la distance p_1 satisfaisant à la formule de position de Descartes,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

L'image A_1B_1 est à la distance

$$p_2 = d - p_1$$

de la lentille L_2. Nous vérifions aisément que cette relation est correcte quels que soient la valeur et le signe de p_1.

A_1B_1 joue le rôle d'objet pour la lentille L_2, qui en donne une image $A'B'$ à la distance p' telle que

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2},$$

d'où

$$\frac{1}{d - p_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2}. \qquad (2)$$

Les relations (1) et (2) peuvent s'écrire respectivement

$$p_1 = \frac{pf_1}{p - f_1},$$

$$p' = \frac{(d - p_1) f_2}{d - p_1 - f_2}.$$

Sous cette forme, elles donnent la position de l'image intermédiaire A_1B_1 et de l'image finale $A'B'$.

2° *Grandeur de l'image.*

Le grandissement linéaire du système est défini par le rapport

$$|\gamma| = \frac{A'B'}{AB}. \qquad (3)$$

Nous pouvons écrire ce rapport sous la forme

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} \times \frac{A'B'}{A_1B_1}.$$

Si nous désignons par γ_1 et γ_2 les grandissements linéaires correspondant aux deux lentilles, la relation précédente s'écrit

$$|\gamma| = |\gamma_1| \times |\gamma_2|,$$

relation qui est également vraie si nous considérons les valeurs algébriques des grandissements linéaires

$$\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$$

ou

$$\gamma = \left(-\frac{p_1}{p}\right)\left(-\frac{p'}{p_2}\right) = \frac{p_1 p'}{p(d - p_1)}. \qquad (4)$$

Nous tirons finalement de (3)

$$A'B = AB \times |\gamma| .$$

Application numérique :

$f_1 = -5$ cm (lentille divergente), $f_2 = +20$ cm (lentille convergente), $p = +8$ cm (objet réel), $AB = 1$ cm.

1° *Position de l'image.*

$$p_1 = \frac{8 \times (-5)}{8 - (-5)}, \qquad p_1 = -\frac{40}{13} \text{ cm.}$$

L'image intermédiaire A_1B_1 est virtuelle :

$$p_2 = d + \frac{40}{13} \text{ cm.}$$

$$p' = \frac{\left(d + \frac{40}{13}\right) \times 20}{\left(d + \frac{40}{13}\right) - 20}, \qquad p' = \frac{20\,(13\,d + 40)}{13\,d - 220} . \tag{5}$$

2° *Grandeur de l'image.*

$$\gamma = \frac{-\frac{40}{13}}{8} \times \frac{\frac{20\,(13\,d + 40)}{13\,d - 220}}{\frac{13\,d + 40}{13}}, \qquad \gamma = \frac{100}{220 - 13\,d} . \tag{6}$$

Discussion.

1° *Nature de l'image finale.*

L'image finale est réelle si $p' > 0$, c'est-à-dire si

$$13\,d - 220 > 0 \quad \text{ou} \quad d > \frac{220}{13} \text{ cm.}$$

Elle est virtuelle si $d < \frac{220}{13}$ cm.

Lorsque $d = \frac{220}{13}$ cm, la fonction (5) présente une discontinuité.

Si $d = \frac{220}{13} + \varepsilon$, $p' = +\infty$. L'image est infiniment éloignée et réelle.

Si $d = \frac{220}{13} - \varepsilon$, $p' = -\infty$. L'image est infiniment éloignée et virtuelle.

2° *Sens et grandeur de l'image.*

L'image A'B' est droite par rapport à l'objet si $\gamma > 0$, c'est-à-dire si

$$220 - 13\,d > 0 \quad \text{ou} \quad d < \frac{220}{13}\ \text{cm}.$$

Elle est renversée si

$$d > \frac{220}{13}\ \text{cm}.$$

Lorsque $d = \frac{220}{13}$ cm, la fonction (6) présente une discontinuité.

Si $d = \frac{220}{13} + \varepsilon$, $\gamma = -\infty$. L'image est infiniment grande et renversée par rapport à l'objet.

Si $d = \frac{220}{13} - \varepsilon$, $\gamma = +\infty$. L'image est infiniment grande et droite par rapport à l'objet.

L'image A'B' est égale à l'objet lorsque le grandissement linéaire a l'une des deux valeurs suivantes :

$$\gamma = \frac{100}{220 - 13\,d} = +1, \quad \text{ce qui donne} \quad d = \frac{120}{13}\ \text{cm et}$$

$p' = -32$ cm;

$$\gamma = \frac{100}{220 - 13\,d} = -1, \quad \text{ce qui donne} \quad d = \frac{320}{13}\ \text{cm et}$$

$p' = +72$ cm.

L'image A'B' est plus petite que l'objet lorsque le grandissement satisfait à la condition $-1 < \gamma < +1$, ce qui donne

$$d < \frac{120}{1} \quad \text{ou} \quad d > \frac{320}{13}.$$

L'image A'B' est plus grande que l'objet si $\gamma < -1$ ou $\gamma > +1$, ce qui donne $\frac{120}{13} < d < \frac{320}{13}$.

3° *Valeurs limites de d.*

La valeur minimale de d est $d = 0$, qui correspond aux valeurs suivantes de p' et de γ :

$$p' = -\frac{40}{11}\ \text{cm} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{5}{11}.$$

Pour déterminer les valeurs de p' et de γ lorsque d devient très grand nous mettrons les expressions (5) et (6) sous les formes équivalentes

$$p' = \frac{20\left(13 + \frac{40}{d}\right)}{13 - \frac{220}{d}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\frac{100}{d}}{\frac{220}{d} - 13}.$$

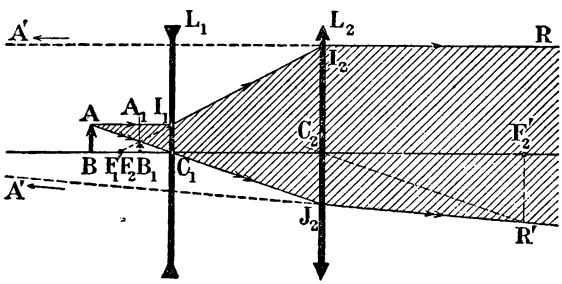
Lorsque d devient très grand, p' tend vers la valeur $p' = 20$ cm, résultat évident, et γ tend vers zéro.

Nous pouvons résumer dans le tableau suivant les résultats de la discussion :

d cm	p' cm	γ	Image		
0	$-\frac{40}{11}$	$\frac{5}{11}$	virtuelle	droite	égale à $\frac{5}{11}$ cm
↗	< 0	< 1	—	—	$<$ objet
$\frac{120}{13}$	-32	$+1$	—	—	$=$ objet (1 cm)
↗	< 0	> 1	—	—	$>$ objet
$\frac{220}{13} - \varepsilon$	$-\infty$	$+\infty$	—	—	infiniment grande
$\frac{220}{13}$					
$\frac{220}{13} + \varepsilon$	$+\infty$	$-\infty$	réelle	renversée	infiniment grande
↗	> 0	< -1	—	—	$>$ objet
$\frac{320}{13}$	$+72$	-1	—	—	$=$ objet (1 cm)
↗	> 0	> -1	—	—	$<$ objet
∞	$+20$	0	—	—	infiniment petite.

Cas particulier : $d = 15$ cm.

Le foyer objet, F_2, de la lentille L_2 se confond avec le foyer image. F'_1, de la lentille L_1 : nous avons affaire à un système afocal.



Les formules (5) et (6) donnent

$$p' = \frac{20(13 \times 15 + 40)}{13 \times 15 - 220}, \qquad p' = -188 \text{ cm.}$$

$$\gamma = \frac{100}{220 - 13 \times 15}, \qquad \gamma = +4.$$

L'image A'B' est virtuelle, droite par rapport à l'objet, située à 188 cm en avant de la lentille L_2, c'est-à-dire à 173 cm en avant de la première lentille, et mesure 4 cm.

Construction géométrique de la marche des rayons.

Le rayon AI_1, parallèle à l'axe principal, se réfracte suivant la droite I_1I_2 passant par le foyer commun F_1', F_2.

Le rayon I_1I_2 se réfracte à travers la lentille L_2 suivant la droite I_2R parallèle à l'axe du système.

Le rayon AC_1 traverse la lentille L_1 sans subir de déviation. Il est parallèle à l'axe secondaire C_2R' de la lentille L_2. Il se réfracte à travers L_2 suivant la droite J_2R' passant par le point d'intersection R' de l'axe C_2R' et du plan focal image de L_2.

Les rayons réfractés I_2R et J_2R' se rencontrent en un point A', qui est l'image du point A. Ce point ne peut trouver place sur la figure avec l'échelle adoptée.

L'image finale s'obtient en abaissant du point A' la perpendiculaire A'B' sur l'axe optique.

Remarque.

Le point A' se trouve sur la parallèle I_2R à l'axe optique, quelle que soit la position de l'objet.

L'image A'B' a donc une longueur constante, qu'il est facile de déterminer.

Les triangles semblables $F_1'I_1C_1$ et $F_2'I_2C_2$ permettent d'écrire la relation

$$\frac{I_2C_2}{I_1C_1} = \frac{F_2C_2}{F_1'C_1} \quad \text{ou} \quad \frac{A'B'}{AB} = \left|\frac{f_2}{f_1}\right|.$$

Le grandissement linéaire γ est égal, en valeur absolue, au rapport des distances focales des deux lentilles.

C'est une propriété générale des systèmes afocaux.

CHAPITRE VI

Convergence d'une lentille. Théorème des convergences. Interposition d'un milieu transparent.

21. — Système de deux lentilles accolées et liquide intermédiaire.

On considère deux lentilles minces, plan-convexes formées du même verre ; on les dispose de façon qu'elles aient même axe principal et qu'elles se touchent par leurs faces convexes. On constate que ce système donne d'un objet à l'infini une image réelle située à 164 cm des lentilles.

On remplit alors d'eau l'espace compris entre les deux surfaces convexes des lentilles. On constate que le système donne alors d'un objet à l'infini une image réelle située à 452 cm des lentilles. On demande l'indice du verre dont sont formées les lentilles. Indice de l'eau : 1,333.

(*Caen.*)

Désignons par :

x et n les indices de réfraction du verre et du liquide, R et R′ les rayons des faces des deux lentilles, avec la convention de signe habituelle (R et R′ sont ici positifs puisque les faces sont convexes) ;

f et f' les distances focales des deux lentilles.

Les lentilles sont suffisamment minces pour que leurs centres optiques puissent être considérés comme confondus.

La convergence de la première, dont le rayon de l'une des faces peut être considéré comme infiniment grand, est

$$\frac{1}{f} = \frac{x - 1}{R}.$$

Celle de la deuxième est

$$\frac{1}{f'} = \frac{x - 1}{R'}.$$

La convergence, $\frac{1}{F}$, du système est donnée par le théorème des convergences :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = (x - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \qquad (1)$$

Si l'on remplit d'eau l'espace compris entre les surfaces convexes, on forme un système optique qui peut être considéré comme composé de trois lentilles accolées séparées par de minces lames d'air : les deux lentilles de verre et une lentille d'eau, biconcave, dont les faces ont pour rayons de courbure — R et — R'.

La convergence $\frac{1}{f''}$ de cette lentille est

$$\frac{1}{f''} = (n - 1)\left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = (1 - n)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

La convergence $\frac{1}{F'}$ du système est donc

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} = (x - 1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + (1 - n)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

ou

$$\frac{1}{F'} = (x - n)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \qquad (2)$$

Les distances focales F et F' sont connues : ce sont les distances des lentilles aux images réelles de l'objet à l'infini données par l'un ou l'autre des systèmes.

Des relations (1) et (2) nous tirons

$$\frac{F'}{F} = \frac{x - 1}{x - n},$$

d'où

$$x = \frac{F'n - F}{F' - F}.$$

Application numérique : $n = 1{,}333$, $F = 164$ cm, $F' = 452$ cm.

$$x = \frac{452 \times 1{,}333 - 164}{452 - 164},$$

$$x = 1{,}52.$$

22. — Lentille complètement immergée dans un liquide.

1° Une lentille plan-convexe dont la face courbe est tournée du côté de la lumière incidente a une distance focale $f = 4$ cm. Sachant que l'indice du verre qui la constitue est $n = \frac{3}{2}$, calculer le rayon de courbure de la face courbe.

2° On immerge la lentille dans de l'eau d'indice $n' = \frac{4}{3}$; déterminer :

a) l'indice du verre par rapport à l'eau ;

b) la nouvelle distance focale de la lentille.

3° A quelle distance de la lentille supposée dans l'air faut-il placer un objet de 1 mm de hauteur pour obtenir une image virtuelle située à 20 cm de la lentille ? Déterminer la grandeur de cette image.

(*Syrie.*)

1° La convergence $\frac{1}{f}$ de la lentille plan-convexe placée dans l'air est donnée par la formule connue

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}, \qquad (1)$$

n désignant l'indice du verre par rapport à l'air, R, le rayon de la face courbe.

Nous en tirons

$$R = f\,(n-1).$$

Numériquement : $f = 4$ cm, $n = \frac{3}{2}$.

$$R = 4 \times \left(\frac{3}{2} - 1\right), \qquad \mathbf{R = 2\ cm.}$$

2° *a*) L'indice n_1 du verre par rapport à l'eau est égal au rapport des indices du verre et de l'eau par rapport à l'air.

$$n_1 = \frac{n}{n'}.$$

Numériquement : $n = \frac{3}{2}, n' = \frac{4}{3}$.

$$n_1 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8}. \qquad \mathbf{n_1 = 1{,}125.}$$

b) La convergence $\frac{1}{f_1}$ de la lentille complètement immergée dans l'eau est donnée par la formule (1) dans laquelle l'indice n est remplacé par l'indice n_1 :

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n_1 - 1}{R} .$$

Nous en tirons

$$f_1 = \frac{R}{n_1 - 1} .$$

Numériquement : $R = 2$ cm, $n_1 = \frac{9}{8}$.

$$f_1 = \frac{2}{\frac{9}{8} - 1}, \qquad f_1 = \mathbf{16\ cm.}$$

Remarque. — La relation précédente peut s'écrire

$$f_1 = \frac{R}{\frac{n}{n'} - 1} .$$

Nous voyons que, si $\frac{n}{n'} > 1$ ou $n > n'$, la distance focale est positive : la lentille a un foyer image réel. C'est le cas envisagé précédemment.

Si, par contre, $\frac{n}{n'} < 1$ ou $n < n'$, la distance focale devient négative : la lentille a son foyer image virtuel. Elle est équivalente à une lentille divergente, bien que nous ayons affaire à une lentille à bords minces.

3° La lentille donne de l'objet AB situé à la distance p une image A'B' située à la distance p' telle que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} .$$

Nous en tirons

$$p = \frac{p'f}{p' - f} .$$

Le grandissement linéaire est

$$\gamma = -\frac{p'}{p} = \frac{f - p'}{f} .$$

La grandeur de l'image est donc

$$A'B' = AB \times |\gamma| .$$

Application numérique :

$p' = -20$ cm (image virtuelle), $f = +4$ cm, $AB = 1$ mm.

$$p = \frac{(-20) \times 4}{-20-4} = \frac{10}{3},$$

$$p = +3{,}33 \text{ cm.}$$

L'objet AB doit être situé à 3,33 cm en avant de la lentille.

$$\gamma = \frac{4-(-20)}{4} = \frac{24}{4},$$

$$\gamma = +6.$$

L'image virtuelle est droite par rapport à l'objet. Sa grandeur est

$$A'B' = 1 \times 6,$$

$$A'B' = 6 \text{ mm.}$$

23. — Lentille et dioptre plan.

Une lentille convergente L de 5 dioptries est placée horizontalement à 45 cm au-dessus du fond d'une cuve vide. A 40 cm au-dessus de la lentille et sur son axe principal se trouve un point lumineux A.

1° Quelle épaisseur d'eau d'indice $\frac{4}{3}$ doit-on mettre dans la cuve pour que l'image du point A se forme exactement sur le fond ?

2° On remplace toute l'eau par un volume égal d'un liquide dont on demande l'indice, sachant que, pour maintenir l'image du point A sur le fond de la cuve, il faut éloigner le point A de la lentille de 3 mm.

(Lille.)

1° Désignons par e l'épaisseur HA' de la couche d'eau que l'on doit verser dans la cuve.

La distance focale de la lentille exprimée en mètres est l'inverse de sa convergence exprimée en dioptries :

$$f = \frac{1}{5} = 0{,}20 \text{ m} \quad \text{ou} \quad 20 \text{ cm.}$$

Le point lumineux A est situé sur l'axe principal de la lentille, à une distance CA = 40 cm de son centre optique (fig. 1). Cette dis-

tance est le double de la distance focale de la lentille. Celle-ci donne de A une image réelle, A_1, située à la distance $CA_1 = 40$ cm.

Cette image A_1 est à une distance du fond de la cuve égale à

$$A'A_1 = CA' - CA_1,$$

ou

$$A'A_1 = 45 - 40 = 5 \text{ cm}.$$

Elle est donc à une distance du dioptre égale à

$$HA_1 = HA' - A'A_1,$$

ou

$$HA_1 = e - 5 \text{ cm}.$$

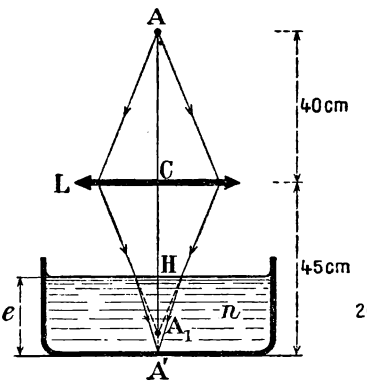


Fig. 1.

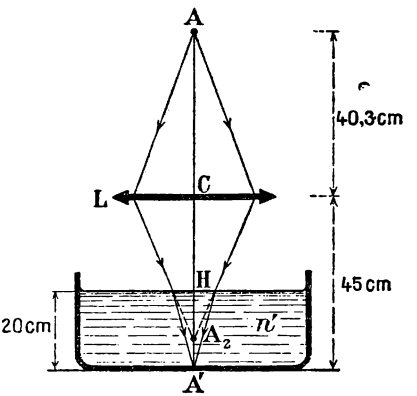


Fig. 2.

Le dioptre plan donne de l'image réelle A_1, jouant le rôle d'objet virtuel, une image réelle, A', qui doit être située sur le fond de la cuve. Les distances HA_1 et HA' sont liées par la relation

$$\frac{HA_1}{1} = \frac{HA'}{n}, \quad \text{ou} \quad HA' = nHA_1,$$

n désignant l'indice de l'eau par rapport à l'air.

Cette relation s'écrit

$$e = n(e - 5) = \frac{4}{3}(e - 5).$$

On tire de cette équation l'épaisseur e cherchée :

$$e = \mathbf{20 \text{ cm}}.$$

2° Désignons par n' l'indice du liquide par rapport à l'air.

La lentille donne de A, situé à une distance p de la lentille, une image A_2 (fig. 2) située à la distance p_2 donnée par la formule de position de Descartes :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}.$$

Nous en tirons

$$p_2 = \frac{pf}{p-f}.$$

Numériquement :

$$p = 40 + 0{,}3 = 40{,}3 \text{ cm}, \quad f = 20 \text{ cm}, \quad p_2 = \frac{40{,}3 \times 20}{40{,}3 - 20} = 39{,}7 \text{ cm}.$$

L'image A_2 est située à une distance du dioptre égale à

$$HA_2 = CA_2 - CH = CA_2 - (CA' - HA') = 39{,}7 - 25 = 14{,}7 \text{ cm}.$$

Le dioptre donne de l'image A_2 jouant le rôle d'objet virtuel une image réelle, A', située sur le fond de la cuve.

Entre les distances HA_2 et HA', nous avons la relation

$$\frac{HA_2}{1} = \frac{HA'}{n'},$$

d'où

$$n' = \frac{HA'}{HA_2}.$$

Numériquement :

$$n' = \frac{20}{14{,}7},$$

$$n' = \mathbf{1{,}36}.$$

24. — Lentille ayant sa face antérieure en contact avec un liquide.

1° Une lentille de verre d'indice $n = \frac{3}{2}$ est en contact par une de ses faces, de rayon de courbure R_1, avec de l'eau, par l'autre, de rayon de courbure R_2, avec de l'air. Un point lumineux A est situé dans l'eau, d'indice $n' = \frac{4}{3}$, sur l'axe de la lentille ; trouver la position de son image A'.

On remarquera qu'en remplaçant l'eau par de l'air à l'intérieur d'une sphère centrée sur le point A on ne change rien à la marche des rayons.

2° Quel doit être le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ pour que A et A' soient simultanément à l'infini ? Dessiner les types de lentilles correspondants. Trouver en ce cas la position de A, quand A est à 40 cm de la lentille.

3° Les rayons de courbure étant quelconques, calculer la distance focale dans l'air et en déduire la condition pour qu'un faisceau parallèle à l'axe dans le premier milieu, soit convergent dans le dernier.

(Nancy.)

1° Soit C le centre optique de la lentille et p la distance du point A à ce centre optique, avec la convention de signe habituelle (p positif : objet réel).

Les rayons R_1 et R_2 seront comptés positivement si les faces correspondantes de la lentille sont convexes, et négativement si elles sont concaves.

Traçons, comme l'indique l'énoncé (fig. 1), une sphère, de centre A et de rayon AC, et remplaçons l'eau par de l'air à l'intérieur de cette sphère. Tout rayon tel que AI arrivant normalement à la surface de l'eau, pénètre dans le liquide sans subir de déviation. Le système optique est donc pour le point A équivalent à un ensemble de deux lentilles minces accolées, séparées par une mince lame d'air :

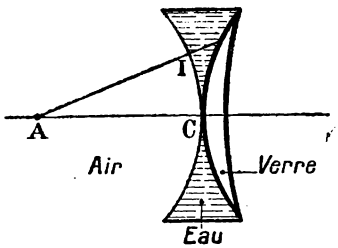


Fig. 1.

— une lentille de verre d'indice n et de rayons R_1 et R_2,

— une lentille d'eau, d'indice n', accolée à la première face de la précédente et de rayons $|p|$ et $|R_1|$.

Remarquons que la première face de la lentille d'eau est concave : son rayon a pour valeur algébrique $-p$. Sa seconde face est concave, si la première face de la lentille de verre est convexe et inversement : son rayon a pour valeur algébrique $-R_1$.

La convergence $\frac{1}{f}$ de la lentille de verre est

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

La convergence $\frac{1}{f'}$ de la lentille d'eau est

$$\frac{1}{f'} = (n'-1)\left(\frac{1}{-p} + \frac{1}{-R_1}\right) = (1-n')\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R_1}\right).$$

La convergence du système est donnée par le théorème des convergences,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} + \frac{1}{p} - \frac{n'}{p} + \frac{1-n'}{R_1},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{n-n'}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} + \frac{1}{p} - \frac{n'}{p}.$$

Ce système donne du point objet A une image A', située à une distance p' telle que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{F},$$

ou $$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{n-n'}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} + \frac{1}{p} - \frac{n'}{p}$$

et, enfin, $$\frac{n'}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{n-n'}{R_1} + \frac{n-1}{R_2}. \qquad (1)$$

Numériquement : $$n = \frac{3}{2}, \quad n' = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{4}{3p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{6R_1} + \frac{1}{2R_2}.$$

Cette relation donne la distance p' de l'image A' à la lentille en fonction de p, R_1 et R_2.

Autre solution.

Le système peut être considéré comme composé d'un dioptre plan MM' séparé par une lame à faces parallèles d'air d'un système de deux lentilles accolées (fig. 2) :

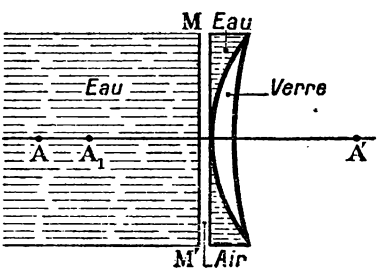


Fig. 2.

— une lentille d'eau, dont la première face est plane et dont la seconde a pour rayon — R_1,

— la lentille de verre de rayons R_1 et R_2.

Ces deux lentilles ont pour convergences

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{n'-1}{R_1} = \frac{1-n'}{R_1} \qquad \text{(lentille d'eau)},$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{(lentille de verre)}.$$

La convergence de l'ensemble est

$$\frac{1}{\varphi}=\frac{1}{f}+\frac{1}{f_1}=\frac{n-1}{R_1}+\frac{n-1}{R_2}+\frac{1-n'}{R_1}=\frac{n-n'}{R_1}+\frac{n-1}{R_2}. \quad (2)$$

Le dioptre plan donne du point objet A situé à la distance p dans le milieu d'indice n', une image A_1 à la distance p_1 donnée par la formule

$$\frac{p}{n'}=\frac{p_1}{1} \quad \text{ou} \quad p_1=\frac{p}{n'}.$$

Cette image virtuelle joue le rôle d'objet réel dans l'air pour le système, qui en donne une image A′ à la distance p' telle que

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{\varphi}=\frac{n-n'}{R_1}+\frac{n-1}{R_2}.$$

Nous en tirons

$$\frac{n'}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{n-n'}{R_1}+\frac{n-1}{R_2}.$$

C'est la relation (1).

2° Pour que A et A′ soient simultanément à l'infini, il faut que l'on ait à la fois

$$p=\infty \quad \text{ou} \quad \frac{n'}{p}=0,$$

et

$$p'=\infty \quad \text{ou} \quad \frac{1}{p'}=0.$$

La relation (1) donne $$\frac{n-n'}{R_1}+\frac{n-1}{R_2}=0, \quad (3)$$

d'où

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{1-n}{n-n'}.$$

Numériquement : $n=\frac{3}{2}$, $n'=\frac{4}{3}$.

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}=-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}},$$

$$\frac{R_2}{R_1}=-3.$$

Conséquence :

Les deux rayons devant être de signe contraire, la lentille est obligatoirement un ménisque :

soit un ménisque convergent (fig. 1),
soit un ménisque divergent (fig. 3).

Cas particulier.

Le point objet A est à 40 cm de la lentille : $p = +40$ cm. Des relations (1) et (3) nous tirons

$$\frac{n'}{p} + \frac{1}{p'} = 0,$$

$$\frac{1}{p'} = -\frac{n'}{p} = -\frac{4}{3 \times 40},$$

$$p' = \mathbf{-30\ cm.}$$

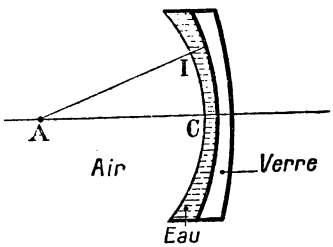


Fig. 3.

L'image A' est virtuelle et située à 30 cm de la lentille.

3° La distance focale f_a du système dans l'air est la distance p' donnée par la formule (1) dans laquelle $p = \infty$.

Nous en tirons

$$\frac{1}{p'} = \frac{n-n'}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} = \frac{R_2(n-n') + R_1(n-1)}{R_1 R_2},$$

$$p' = f_a = \frac{R_1 R_2}{R_2(n-n') + R_1(n-1)},$$

$$f_a = \frac{1}{\dfrac{n-n'}{R_1} + \dfrac{n-1}{R_2}}.$$

Pour qu'un faisceau parallèle à l'axe dans le premier milieu soit convergent dans le dernier, il faut que nous ayons

$$f_a > 0,$$

$$\frac{n-n'}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} > 0,$$

$$\frac{R_2}{R_1} > \frac{1-n}{n-n'}. \qquad (4)$$

Numériquement :

$$\frac{R_2}{R_1} > -3.$$

Remarque.

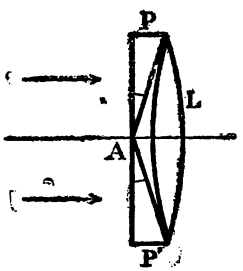
Considérons de nouveau le système comme composé d'un dioptre plan et de deux lentilles accolées. Un faisceau de lumière parallèle à l'axe optique n'est pas dévié par le dioptre mais seulement par le système de lentilles accolées, dont la convergence est (formule 2)

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{n - n'}{R_1} + \frac{n - 1}{R_2}.$$

Les relations (3) et (4) expriment que le foyer image de ce système est à l'infini $\left(\frac{1}{\varphi} = 0\right)$ ou qu'il est réel $\left(\frac{1}{\varphi} > 0\right)$.

25. — Lentille et prismes de petit angle accolés.

Une lentille convergente mince, L, de longueur focale égale à 60 cm, et deux prismes identiques, P et P', de petit angle, A, sont disposés comme l'indique la figure ci-contre. On fait tomber sur ce système un faisceau de rayons parallèles à l'axe principal de la lentille. Pour produire ce faisceau, on dispose d'une source étendue de lumière monochromatique, d'un écran métallique percé d'un trou d'épingle et d'une autre lentille, L', dont la convergence est égale à 2 dioptries. On observe dans le plan focal de L deux points lumineux, dont la distance est égale à 8,4 cm.



1° Représenter schématiquement le montage ; indiquer la position de ses divers éléments et expliquer la formation des deux images dans le plan focal de L.

2° Calculer en degrés, à 0,5 pour cent près, l'angle A de chacun des prismes en admettant que, pour la lumière utilisée, l'indice du verre est égal à 1,5.

3° On écarte progressivement l'un de l'autre les deux prismes, en leur donnant des mouvements de translation opposés, perpendiculairement à l'axe du système. Décrire les modifications observées dans l'aspect du phénomène dans le plan focal de L.

(Lyon.)

1° Le faisceau de lumière issu de la lentille L' sera formé de rayons parallèles à l'axe principal, si cette lentille reçoit un faisceau lumineux d'une source ponctuelle placée en son foyer principal objet. C'est donc en ce point qu'il faut placer le trou d'épingle éclairé par la source étendue de lumière monochromatique. Sa distance à la lentille exprimée en mètres est l'inverse de la convergence de celle-ci exprimée en dioptries :

$$f' = \frac{1}{2} = 0{,}50 \text{ m}.$$

Le système prismes-lentille L sera disposé de telle sorte que les lentilles L et L′ aient même axe principal (fig. 1).

Le prisme P reçoit une partie du faisceau de lumière issu de L′ sous une incidence normale. C'est un prisme, de petit angle. Tous les rayons sont donc déviés vers sa base du même angle D donné, en fonction de l'angle A et de l'indice n du verre, par l'expression $D = (n-1)A$.

Le faisceau réfracté est parallèle à l'axe secondaire CM. Il converge au foyer secondaire image M correspondant à cet axe. Par raison de symétrie, le faisceau reçu par le prisme P′ converge au point M′ symétrique de M par rapport à l'axe.

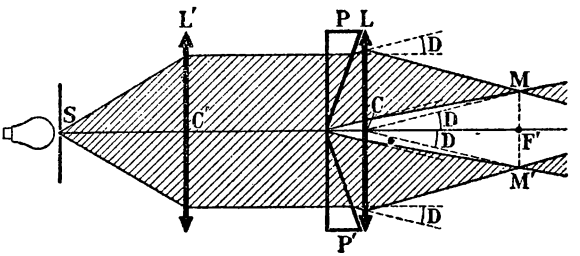


Fig. 1.

2° L'axe secondaire CM fait avec l'axe principal un angle égal à D. Dans le triangle MCF′, nous avons la relation

$$MF' = CF' \times \operatorname{tg} D,$$

ou sensiblement $$MF' = f \times D.$$

De même $$M'F' = f \times D.$$

Nous avons donc sensiblement

$$MM' = 2f \times D = 2f(n-1)A.$$

Nous en tirons

$$A = \frac{MM'}{2f(n-1)}.$$

Application numérique : $MM' = 8{,}4$ cm, $n = 1{,}5$, $f = 60$ cm.

$$A = \frac{8{,}4}{2 \times 60\ (1{,}5-1)} = 0{,}14 \text{ radian}$$

ou $$A = \frac{180}{\pi} \times 0{,}14, \quad A = 8^\circ 1'.$$

En négligeant 1′ nous commettons une erreur relative de $\frac{1}{481} < \frac{0{,}5}{100}$.

Nous écrivons $A = 8^\circ$, à moins de 0,5 % près.

3° Écartons progressivement l'un de l'autre les deux prismes, perpendiculairement à l'axe du système. La direction du faisceau réfracté par P ne change pas. L'image M du point S ne bouge donc pas. Mais la section du faisceau reçu par le prisme diminue : l'image M devient moins lumineuse.

Le même phénomène se produit pour l'image M'.

Une partie du faisceau issu de L' traverse directement la lentille et vient converger au point F' (fig. 2) milieu de MM'.

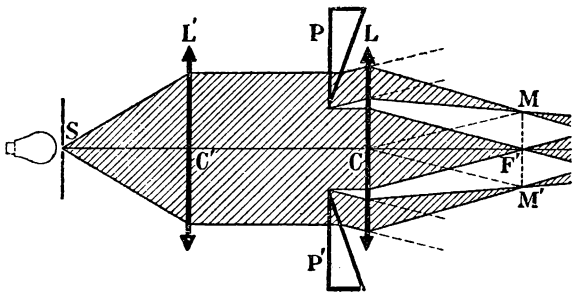


Fig. 2.

A mesure que les prismes sont écartés, l'éclat de l'image centrale croît, tandis que celui des images M et M' décroît.

L'image centrale subsiste seule lorsque les deux prismes ne reçoivent plus de lumière.

26. — Lentille et lame à faces parallèles.

1° Au moyen d'une lentille convergente L_1 on forme d'un point lumineux S situé sur l'axe principal de la lentille à 50 cm de celle-ci, une image que l'on recueille sur un écran E placé à 2 m de L_1. Déterminer la distance focale de la lentille : *a*) par construction géométrique ; *b*) par le calcul.

2° On interpose entre L_1 et E une lame à faces parallèles d'épaisseur $e = 6$ cm. Dans quel sens doit-on déplacer E pour obtenir, de nouveau, une image nette de S ? Sachant que ce déplacement est 2 cm, calculer l'indice de réfraction de la lame.

Construction géométrique de l'image.

3° Où se formerait l'image de S si l'on interposait la lame à faces parallèles précédente en avant de L_1 (entre S et L_1)?

Construction géométrique.

4° Déterminer la nature et la distance focale d'une lentille L_2 placée contre L_1 qui ramènerait l'image de S obtenue au 3° à se former de nouveau à 2 m de L_1.

Construction géométrique.

N. B. — Les constructions devront être faites à l'échelle.

(*Lyon.*)

1° *a*) *Détermination géométrique de la distance focale.*

Le rayon lumineux SI, parallèle à l'axe secondaire C*x*, se réfracte suivant la droite IS' passant par le point image (fig. 1).

Le rayon réfracté rencontre l'axe secondaire en un point φ' qui est, par définition, le foyer secondaire image correspondant à l'axe Cx. Le plan de front passant par le point φ' est le plan focal image de la

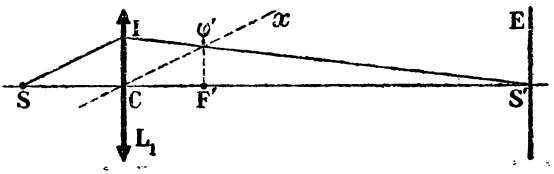


Fig. 1.

lentille. Ce plan rencontre l'axe principal au foyer principal image F' La distance focale de la lentille est la distance CF'.

b) Calcul de la distance focale.

La lentille convergente donne du point objet S situé à la distance connue p, une image réelle S' située sur l'axe principal à la distance $CS' = p'$.

La distance focale f_1 de la lentille est donnée par la formule de position de Descartes :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1}.$$

Nous en tirons $$f_1 = \frac{pp'}{p + p'}.$$

Numériquement : $p = +50$ cm ou $+0{,}50$ m (objet réel), $p' = +2$ m (image réelle).

$$f_1 = \frac{0{,}50 \times 2}{2 + 0{,}50} = \frac{1}{2{,}5},$$

$$f_1 = \mathbf{0{,}40\ m.}$$

2° La lame à faces parallèles d'indice inconnu n et d'épaisseur e est intercalée entre la lentille et l'image réelle S' perpendiculairement à l'axe principal de la lentille. S' joue donc le rôle d'objet virtuel pour la lame, qui en donne une image réelle, S_1', située sur l'axe principal et déplacée par rapport à l'objet, dans le sens de la lumière, d'une longueur

$$d = e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Nous tirons de cette expression

$$n = \frac{e}{e - d}.$$

Numériquement : $e = 6$ cm, $d = 2$ cm.

$$n = \frac{6}{6-2},$$

$$n = 1{,}5.$$

Construction géométrique.

Nous nous contenterons de construire, à l'échelle, la partie de la figure contenant la lame à faces parallèles (fig. 2).

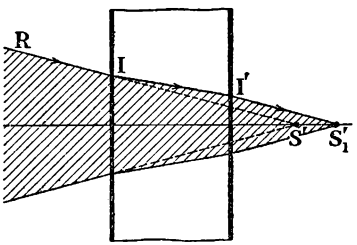


Fig. 2.

Nous plaçons sur la figure les points S′ et S'_1. Le rayon RI, passant par l'objet virtuel S′, est réfracté par la lame suivant la droite I′S'_1, parallèle à RI.

Nous construisons de la même façon le rayon symétrique de RI par rapport à l'axe. La marche du pinceau de lumière concourant à la formation de l'image finale S'_1 est représentée en hachures.

3° Nous supposons cette fois la lame à faces parallèles intercalée entre le point objet S et la lentille. La lame donne du point S une image virtuelle S_2 située sur l'axe principal et déplacée par rapport à l'objet, dans le sens de la lumière, d'une longueur

$$d = e\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Cette image est à la distance $p_2 = p - d$ de la lentille. Elle joue, pour cette dernière, le rôle d'objet réel. La lentille en donne une image, S'_2, à une distance p'_2 donnée par la formule de position de Descartes :

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{f_1}.$$

Nous en tirons

$$p'_2 = \frac{p_2 f_1}{p_2 - f_1} = \frac{(p-d)f_1}{p-d-f_1}.$$

Numériquement :

$p = +0{,}50$ m, $d = 2$ cm ou $0{,}02$ m, $f_1 = 0{,}40$ m.

$$p'_2 = \frac{(0{,}50 - 0{,}02)\,0{,}40}{0{,}50 - 0{,}02 - 0{,}40},$$

$$p'_2 = 2{,}40 \text{ m}.$$

Construction géométrique.

La figure 3, construite comme la précédente, montre la marche d'un pinceau de lumière issu de S à travers la lame à faces parallèles.

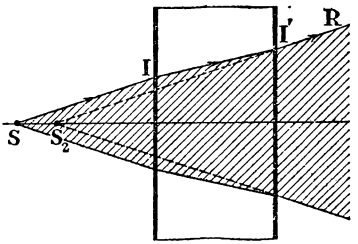


Fig. 3.

4° La lentille L_2 peut être placée indifféremment avant ou après la lentille L_1. Plaçons-la après cette lentille (fig. 4) et supposons négligeable la distance C_1C_2 des deux centres optiques. Le point image S_2' joue le rôle d'objet virtuel pour la lentille L_2, qui en donne une image réelle S' située à la distance p' du système.

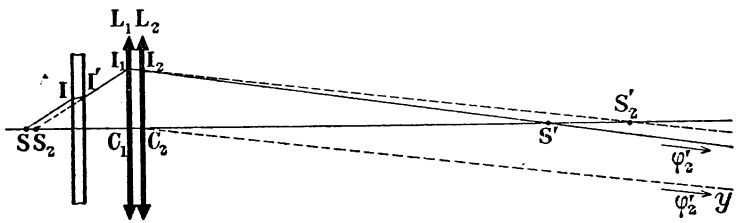


Fig. 4.

Entre p_2, p' et la distance focale f_2 de la lentille L_2 nous avons la relation

$$\frac{1}{p_2'} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2}.$$

Nous en tirons

$$f_2 = \frac{p_2'p'}{p_2' + p'}.$$

Numériquement : $p_2' = -2{,}40$ m (objet virtuel), $p' = +2$ m (image réelle),

$$f_2' = \frac{(-2{,}40) \times 2}{-2{,}40 + 2} = \frac{4{,}80}{0{,}40} = \frac{48}{4},$$

$$f_2 = \mathbf{12\ m.}$$

Construction géométrique.

Le rayon I'R issu de la lame à faces parallèles rencontre la lentille L_1 en un point I_1, est réfracté par cette lentille suivant la droite I_1I_2

passant par S_2. Il est ensuite réfracté par la lentille L_2 suivant la droite I_2S'.

La droite I_1I_2 est parallèle à l'axe secondaire C_2y. Le rayon réfracté I_2S' rencontre l'axe secondaire C_2y en un point φ'_2 qui est le foyer secondaire image de la lentille L_2 correspondant à l'axe C_2y. Le plan de front passant par φ'_2 rencontre l'axe principal au foyer principal image F'_2 de la lentille L_2. Ce point ne peut être placé sur la figure avec l'échelle adoptée.

Autre solution du 4°.

Les lentilles accolées L_1 et L_2 sont supposées suffisamment minces pour que les centres optiques puissent être confondus en un même point, C. Ces deux lentilles pourraient être remplacées par une lentille unique de centre optique C et dont la convergence, $\frac{1}{F}$, serait donnée par le théorème des convergences :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Cette lentille donnerait du point objet S_2, situé à la distance $CS_2 = p_2$, une image S' située à la distance $CS' = p'$. Entre p_2, p' et F, nous avons la relation

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'}.$$

Des deux relations précédentes, nous tirons

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'},$$

d'où

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} - \frac{1}{f_1}.$$

Numériquement : $p_2 = p - d = 0{,}50 - 0{,}02 = +\,0{,}48$ m (objet réel), $p' = +\,2$ m (image réelle), $f_1 = 0{,}40$ m.

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{0{,}48} + \frac{1}{2} - \frac{1}{0{,}40},$$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{12},$$

$$f_2 = \mathbf{12\ m.}$$

CHAPITRE VII

Lentilles et miroir.

27. — Lentille convergente et miroir plan situé dans son plan focal image.

Au foyer image d'une lentille convergente se trouve un miroir plan perpendiculaire à l'axe principal.

On demande la position et la grandeur de l'image finale d'un objet, placé devant la lentille, dont les rayons ont traversé une première fois la lentille, se sont réfléchis sur le miroir et ont traversé une seconde fois la lentille.

Étudier les conditions pour que l'image finale soit réelle.

Donner la marche d'un pinceau de rayons issus d'un point de l'objet.

(Alexandrie.)

Nous nous trouvons dans un cas particulier : miroir plan dans le plan focal image de la lentille. Le problème peut être résolu géométriquement, sans le secours des formules de Descartes.

Construction géométrique de l'image.

Représentons l'objet par une petite droite, AB, perpendiculaire à

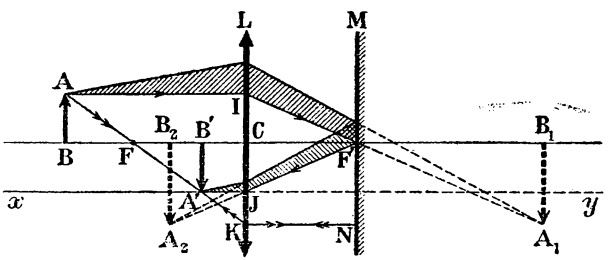


Fig. 1.

l'axe principal de la lentille, et suivons la marche de deux rayons particuliers issus de A, à travers le système optique (fig. 1).

Le rayon AI, parallèle à l'axe, est réfracté par la lentille suivant IF', réfléchi ensuite par le miroir suivant la droite F'J, symétrique de IF' par rapport à l'axe, et enfin réfracté par la lentille suivant la droite Jx parallèle à l'axe.

Le rayon AF, passant par le foyer principal objet, est réfracté par la lentille suivant la droite KN, parallèle à l'axe. Il se réfléchit ensuite sur lui-même et est enfin réfracté par la lentille suivant la droite KF, qui se confond avec le rayon incident.

L'image A' de A est à l'intersection des rayons convergents Jx et KF. L'image A'B' s'obtient en abaissant du point A' la perpendiculaire sur l'axe : elle est réelle, égale à l'objet et renversée par rapport à celui-ci.

Discussion.

L'image A' de A est le point d'intersection de la droite AF et de la droite xy, parallèle à l'axe, menée par le point J symétrique de I par rapport au centre optique C.

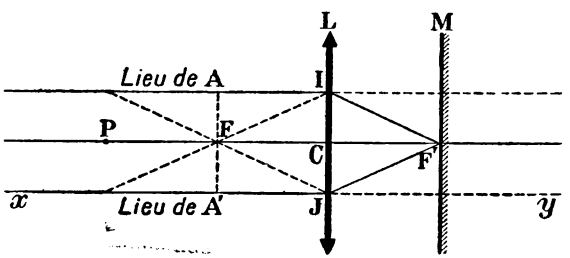


Fig. 2.

L'image de l'objet est réelle si ce point A' est situé en avant de la lentille. L'examen de la figure 2 montre immédiatement que la condition de réalité de l'image est

$$0 \leqslant CB \leqslant 2f.$$

Si CB = 0, l'image est à la distance $2f$.

Si CB = $2f$, l'image est à la distance 0.

Si CB = f, l'image est située dans le plan de l'objet.

Remarquons que, quelle que soit la position de l'objet, l'image A

est située sur xy : A'B' est toujours égale à AB. Tous ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Objet	Image
au-delà de P	virtuelle
en P	réelle, en C
entre P et F	réelle, entre C et F
en F	réelle, en F
entre F et C	réelle, entre F et P
en C	réelle, en P

Marche d'un pinceau lumineux.

Le pinceau lumineux issu de A concourt successivement à la formation de l'image intermédiaire, A_1, donnée par la lentille, de l'image intermédiaire A_2, donnée par le miroir, et enfin de l'image finale A'.

28. — Système de deux lentilles convergentes et miroir plan.

A. — Un point lumineux, A, est placé à une distance D = 200 cm d'un miroir plan, M. Entre A et M, on déplace une lentille convergente mince, L_1, de telle sorte que son centre optique, O, reste sur la perpendiculaire, AH, abaissée de A sur M, l'axe optique de la lentille restant confondu avec AH.

La lumière issue de A traverse L_1, se réfléchit sur M, retraverse L_1 en sens inverse et forme une image définitive, A'. Cette image A' est confondue avec le point objet A pour deux positions de L_1 correspondant à des distances OH égales respectivement à 100 centimètres et à 150 centimètres. Expliquer ces résultats et déterminer la distance focale, f_1, de la lentille L_1.

B. — On accole à cette lentille L_1 une lentille convergente mince, L_2, de distance focale $f_2 = 75$ cm, le centre optique, O', de l'ensemble étant situé entre A et H à 150 centimètres du miroir.

1° Où se forme l'image définitive A' ?

2° Tracer la marche d'un faisceau de rayons lumineux issu de A et aboutissant à A'.

3° De combien et dans quel sens doit-on déplacer le miroir M parallèlement à lui-même pour que l'image définitive A' revienne coïncider avec A ?

C. — L_1 restant fixe, on déplace L_2 vers le miroir de façon que son centre optique coïncide avec le foyer image de L_1, le point objet A étant supposé à l'infini dans la direction de l'axe commun aux deux lentilles.

On demande où se forme l'image définitive A' de A dans le système ainsi transformé.

(Alger.)

A. — Désignons la distance OH par d. Le point lumineux A joue le rôle d'objet réel pour la lentille. Sa distance p à cette dernière est

positive, avec la convention de signe habituelle. Entre les distances d, D et p, nous avons la relation

$$D = p + d. \tag{1}$$

La lentille donne de A une image A_1, située à la distance p_1 telle que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f_1}. \tag{2}$$

L'image A_1 est à une distance du miroir égale à

$$p_2 = d - p_1.$$

On vérifie aisément que cette relation est toujours valable si l'on convient d'appliquer à la distance p_2 la convention de signe utilisée pour les distances p et p_1.

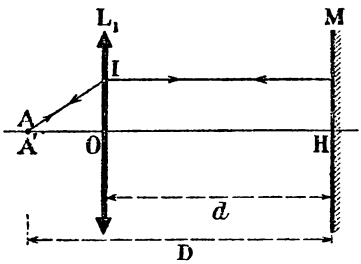


Fig. 1.

Le miroir donne de l'image A_1, jouant le rôle d'objet, une image A_2 située à la distance

$$p' = -p_2 = p_1 - d,$$

réelle si A_1 est virtuelle, et inversement.

L'image A_2 est à la distance $d - p_2 = 2d - p_1$ de la lentille. Celle-ci en donne une image A' à la distance p' telle que

$$\frac{1}{2d - p_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1}. \tag{3}$$

Les équations (1), (2) et (3) sont générales et s'appliquent à tous les systèmes analogues composés d'une lentille et d'un miroir plan.

L'image A' se confond avec l'objet A si nous avons $p' = p$. L'équation (3) devient

$$\frac{1}{2d - p_1} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f_1}. \tag{4}$$

De (2) et (4) nous tirons

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{2d - p_1} = 0,$$

ou

$$\frac{2(d - p_1)}{p_1(2d - p_1)} = 0.$$

Cette équation est satisfaite lorsque l'une des deux conditions suivantes est remplie :

1° $p_1 = \infty$. Nous déduisons de (2) $p = f$.

Tout rayon issu de A, tel que AI, est réfracté par la lentille parallèlement à son axe optique, réfléchi par le miroir suivant la même direction et réfracté de nouveau suivant IA. L'image A′ est bien confondue avec A (fig. 1).

2° $p_1 = d$. L'image A_1 se forme alors sur le miroir.

De l'équation (1), nous tirons

$$p = D - d.$$

En portant les valeurs de p_1 et de p dans l'équation (2), nous obtenons

$$\frac{1}{D-d} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f_1}.$$

Si la distance focale est donnée, cette équation permet de calculer la distance d.

Après simplification, nous obtenons l'équation

$$d^2 - Dd + f_1 D = 0. \quad (5)$$

Cette équation a deux racines, d' et d'', si

$$D^2 - 4 f_1 D > 0,$$

ou $$D(D - 4 f_1) > 0.$$

Cette inégalité est satisfaite si

$$D > 4 f_1.$$

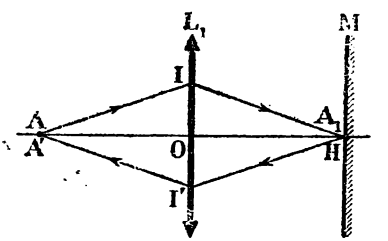


Fig. 2.

Si $D = 4f_1$, l'équation (5) a une racine double :

$$d' = d'' = \frac{D}{2}.$$

La lentille L_1 est au milieu de la distance D.

La figure 2 montre la marche d'un rayon lumineux dans ce cas particulier.

Application numérique : $D = 200$ cm.

1° $d = 100$ cm $= \frac{D}{2}$. La lentille L_1 est au milieu de la distance D. Nous sommes dans le cas particulier où $D = 4f_1$ (fig. 2).

La distance focale de la lentille est donc

$$f_1 = \frac{D}{4} = \frac{200}{4},$$

$$f_1 = \mathbf{50\ cm.}$$

2° $d = 150$ cm.

$p = 200 - 150 = 50$ cm. La distance AO est égale à la distance focale.

Nous sommes dans le cas où $p = f_1$ (fig. 1).

B. — Soit F la distance focale de la lentille unique équivalente à l'ensemble des deux lentilles accolées L_1 et L_2. Le théorème des convergences donne

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

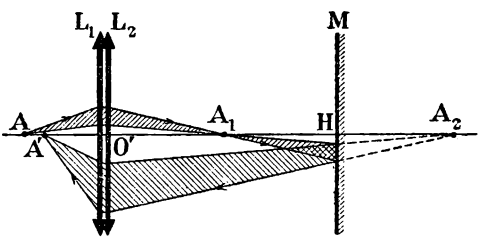


Fig. 3.

Les équations (2) et (3) deviennent

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p_1} = \frac{1}{F}, \qquad \frac{1}{2d - p_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{F}.$$

Enfin, nous avons toujours

$$D = p + d.$$

Les quatre équations précédentes permettent de déterminer la distance p' demandée.

Application numérique : $D = 200$ cm, $f_1 = 50$ cm, $f_2 = 75$ cm, $d = 150$ cm.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{50} + \frac{1}{75} = \frac{1}{30}, \qquad F = 30 \text{ cm};$$

$$p = D - d = 200 - 150, \qquad p = 50 \text{ cm};$$

$$p_1 = \frac{pF}{p - F} = \frac{50 \times 30}{50 - 30}, \qquad p_1 = 75 \text{ cm}.$$

Le point A_1 est au milieu de la droite O'H,

$$p' = \frac{(2d - p_1)\,F}{2d - p_1 - F} = \frac{(2 \times 150 - 75)\,30}{2 \times 150 - 75 - 30} = \frac{450}{13},$$

$$p' = + \mathbf{34{,}62\ cm.}$$

L'image A' est réelle et située à 34,62 cm en avant de la lentille L_1.

2° La figure 3 donne la marche d'un pinceau lumineux issu de A et aboutissant à A'.

3° L'image A' est confondue avec A quand l'une des conditions suivantes est remplie :

$p_1 = \infty$, d'où $p = F$. Ce cas ne peut être réalisé par déplacement du miroir.

$p_1 = d$: l'image A_1 doit se former sur le miroir.

Cette image étant à la distance $p_1 = 75$ cm de la lentille, il faut déplacer le miroir, parallèlement à lui-même, de la longueur $HA_1 = 150 - 75 = 75$ cm (fig. 3).

Le miroir doit être déplacé vers la lentille de

$$HA_1 = \mathbf{75\ cm.}$$

C. — L'image A_1 de A, donnée par la lentille L_1, est située en son foyer image F_1', qui se confond avec le centre optique de la lentille L_2.

Cette image, située à la distance $d - f_1$ du miroir plan, joue le rôle d'objet réel pour ce dernier, qui en donne une image virtuelle A_2 située à la distance $-(d - f_1) = f_1 - d$. A_2 joue le rôle d'objet réel pour la lentille L_2. Sa distance algébrique à cette dernière est égale à $-2(f_1 - d) = 2(d - f_1)$.

La lentille L_2 donne de A_2 une image A_3 à la distance p_3 telle que

$$\frac{1}{2(d - f_1)} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{f_2}. \qquad (6)$$

Cette image est à la distance $f_1 - p_3$ de la lentille L_1. Celle-ci en donne une image A', à la distance p' donnée par l'équation

$$\frac{1}{f_1 - p_3} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1}. \qquad (7)$$

Des équations (6) et (7) nous tirons respectivement

$$p_3 = \frac{2(d - f_1) f_2}{2(d - f_1) - f_2}, \qquad p' = \frac{(f_1 - p_3) f_1}{f_1 - p_3 - f_1} = \frac{(f_1 - p_3) f_1}{-p_3}.$$

Application numérique : Nous supposons que le miroir se trouve dans sa dernière position.

$$d = 75 \text{ cm}, \quad f_1 = 50 \text{ cm}, \quad f_2 = 75 \text{ cm}.$$

$$p_2 = \frac{2 \times (75 - 50)\, 75}{2\,(75 - 50) - 75} = -150 \text{ cm},$$

$$p' = \frac{\left[50 - (-150)\right] 50}{-(-150)} = \frac{200}{3},$$

$$p' = +\,66{,}7 \text{ cm}.$$

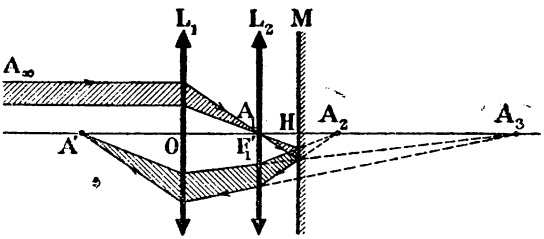


Fig. 4.

L'image finale, A', est réelle. La figure 4 montre la marche d'un pinceau lumineux à travers le système.

CHAPITRE VIII

Appareil photographique.

29. — Appareil photographique : image d'une personne en mouvement.

L'objectif d'un appareil photographique est constitué par une lentille convergente de 15 cm de distance focale. On photographie une personne qui passe à 2,40 m de l'objectif, se déplaçant perpendiculairement à l'axe de celui-ci à la vitesse de 1,50 m/s. Le temps de pose est $\frac{1}{100}$ s.

1° L'appareil étant convenablement mis au point, l'image se forme exactement sur la plaque. Quelle est la grandeur de cette image, la personne ayant 1,65 m ?

2° De combien s'est déplacée l'image pendant la pose ? Quel aurait dû être le temps de pose pour que l'image soit *nette*, c'est-à-dire pour qu'elle ne se déplace que de $\frac{1}{5}$ mm ?

3° Si l'appareil ne permet qu'un temps de pose de $\frac{1}{100}$ s, à quelle distance aurait-il fallu se placer pour que l'image ne se déplace que de $\frac{1}{5}$ mm ? Quelle aurait été la grandeur de cette image ?

(Poitiers.)

1° Soit f la distance focale de la lentille constituant l'objectif et d la distance de la personne photographiée à l'objectif, ces distances étant prises en valeur absolue.

L'image, A'B', de l'objet AB se forme sur la plaque, à une distance d' de l'objectif donnée par la formule de position de Descartes :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}.$$

Les trois termes sont positifs : objet réel, image réelle, lentille convergente.

Nous en tirons $$d' = \frac{df}{d - f}. \qquad (1)$$

Par définition, le grandissement linéaire γ, *pris en valeur absolue*, est égal au rapport $\frac{A'B'}{AB}$.

Il est donné par la formule de grandissement de Descartes :

$$\gamma = \left| -\frac{d'}{d} \right| = \frac{f}{d-f}.$$

Nous en tirons

$$A'B' = AB \times \gamma.$$

Numériquement : $f = 15$ cm, $d = 2{,}40$ m ou 240 cm, $AB = 1{,}65$ m.

$$\gamma = \frac{15}{240 - 15} = \frac{1}{15},$$

$$A'B' = 1{,}65 \times \frac{1}{15} = 0{,}11 \text{ m}, \qquad \mathbf{A'B' = 11\,cm.}$$

2° Pendant le temps de pose t secondes, la personne, qui se déplace à la vitesse de v m/s, a parcouru la distance

$$e = vt.$$

Son image s'est déplacée de

$$e' = e\gamma = vt\gamma.$$

Pour que l'image ne se déplace que de la longueur e'_1 il aurait fallu que le temps de pose eût la valeur t_1 telle que

$$e'_1 = vt_1\gamma.$$

Nous tirons des relations précédentes $\frac{t_1}{t} = \frac{e'_1}{e'}$,

ou

$$t_1 = t \times \frac{e'_1}{e'}.$$

Numériquement :

$$v = 1{,}5 \text{ m/s}, \quad \gamma = \frac{1}{15}, \quad t = \frac{1}{100} \text{ s}, \quad e'_1 = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ mm}.$$

Déplacement de l'image :

$$e' = 1{,}5 \times \frac{1}{100} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{1\,000} \text{ m}, \quad \mathbf{e' = 1\ mm.}$$

Temps de pose :

$$t_1 = \frac{1}{100} \times \frac{0{,}2}{1},$$

$$t_1 = 0{,}002 \text{ s}.$$

3° Pour que l'image ne se déplace que de la distance e'_1 le temps de pose restant t, il aurait fallu que le grandissement linéaire prît la valeur γ_1, telle que

$$e'_1 = vt\gamma_1 \quad , \quad \text{d'où} \quad \gamma_1 = \frac{e'_1}{vt}. \tag{2}$$

Si nous désignons par d_1 et d'_1 les nouvelles distances de l'objet et de l'image à l'objectif, les formules de Descartes donnent par ailleurs

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d'_1} = \frac{1}{f} \qquad \text{et} \qquad \gamma_1 = \frac{d'_1}{d_1}.$$

Nous en tirons $$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{\gamma_1 d_1} = \frac{1}{f}$$

et $$d_1 = f\left(1 + \frac{1}{\gamma_1}\right). \tag{3}$$

Les formules (2) et (3) nous permettent de calculer la distance d_1

Numériquement : $e'_1 = 1/5$ mm ou 0,000 2 m, $v = 1{,}5$ m/s, $t = 1/100$ s, $f = 15$ cm ou 0,15 m.

$$\gamma_1 = \frac{0{,}000\,2 \times 100}{1{,}5 \times 1} = \frac{1}{75},$$

$$d_1 = 0{,}15\ (1 + 75), \qquad \mathbf{d_1 = 11{,}40\ m.}$$

La grandeur de la nouvelle image est

$$A'_1B'_1 = AB \times \gamma_1.$$

Numériquement : $A'_1B'_1 = 1{,}65 \times \frac{1}{75} = 0{,}022$ m,

$$\mathbf{A'_1B'_1 = 2{,}2\ cm.}$$

Remarque.

La nouvelle image n'est plus à la distance d' — formule (1) — mais à la distance $d'_1 = \gamma_1 d_1$.

Numériquement : $$d' = \frac{2{,}40 \times 0{,}15}{2{,}40 - 0{,}15} = \frac{2{,}40}{15} \text{ m ou } 16 \text{ cm},$$

$$d'_1 = \frac{1}{75} \times 11{,}40 = 0{,}152 \text{ m ou } 15{,}2 \text{ cm}.$$

L'image se forme donc à 0,8 cm en avant de la plaque. Pour obtenir une image nette sur la plaque, il serait indispensable de déplacer celle-ci de 0,8 cm ou 8 mm.

30. — Appareil photographique : profondeur de champ. Emploi d'une bonnette.

L'objectif d'un appareil photographique peut être assimilé à une lentille mince convergente de distance focale 7,5 cm.

1° On se propose de photographier un paysage et, dans ce but, l'appareil est mis au point sur l'infini. Quelle est alors la distance de l'objectif à la plaque sensible ? Quelle est la plus petite distance des objets qui pourront être photographiés sans que soit modifiée la mise au point de l'appareil ? On admettra que les photographies restent pratiquement nettes lorsqu'à l'image d'un point se substitue sur la plaque sensible un petit cercle éclairé dont le diamètre ne dépasse pas $\frac{1}{20}$ mm.

Dans les conditions d'utilisation de l'appareil, le diamètre d'ouverture de l'objectif est 1 cm.

2° On photographie ensuite un objet situé à 1,50 m de l'objectif. Dans quel sens et de combien doit-on modifier, par rapport à la mise au point précédente, la distance qui sépare l'objectif de la plaque sensible ?

3° Sans changer la nouvelle distance ainsi déterminée, on se propose de photographier un détail du même objet, en plaçant celui-ci plus près de l'objectif. Dans ce but, on accole à l'objectif une lentille, dont on demande d'indiquer la nature. Déterminer aussi sa distance focale, sachant que l'appareil ainsi modifié permet de photographier l'objet situé à 0,75 m de l'objectif.

Comparer en grandeur l'image ainsi obtenue à celle du même détail photographié dans les conditions de la deuxième question.

(Rennes.)

1° Lorsque l'appareil est mis au point sur l'infini, l'image du paysage se forme dans le plan focal image de l'objectif. La distance l de celui-ci à la plaque sensible est égale à la distance focale f.

$$l = f.$$

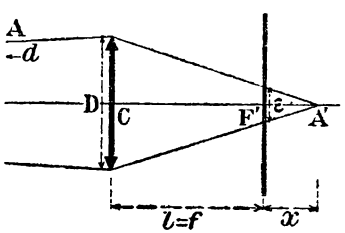


Fig. 1.

Numériquement :

$$l = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Lorsqu'un point objet, A, situé sur l'axe optique, passe de l'infini à une distance d de l'objectif, son image, A', s'éloigne du foyer image, F', d'une longueur F'A' $= x$. Le faisceau lumineux qui converge au point image a la forme d'un cône dont le sommet est A' et dont la base est l'objectif (fig. 1). Le point image est remplacé, sur la plaque sensible, par un cercle de diamètre ε. Si D est le diamètre de l'objectif, nous avons la relation d'homothétie

$$\frac{D}{\varepsilon} = \frac{f + x}{x}. \qquad (1)$$

Par ailleurs, les distances d et $f + x$ satisfont à la formule de Descartes

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f+x} = \frac{1}{f}.$$

Les trois termes sont positifs : objet réel, image réelle, lentille convergente. Nous tirons de cette relation

$$d = \frac{(f+x)f}{x}. \qquad (2)$$

En divisant membre à membre (2) et (1) il vient

$$\frac{d\varepsilon}{D} = f,$$

d'où

$$d = \frac{fD}{\varepsilon}.$$

Numériquement : $f = 7{,}5$ cm, $D = 1$ cm, $\varepsilon = \frac{1}{20}$ mm ou $\frac{1}{200}$ cm.

$$d = \frac{7{,}5 \times 1}{\frac{1}{200}} = 1\,500 \text{ cm}.$$

$$d = \mathbf{15\ m.}$$

La distance comprise entre 15 mètres et l'infini est la profondeur de champ de l'appareil.

2° L'objet se trouve, cette fois, à la distance $d_1 < d$ de l'objectif. Celui-ci en donne une image dans un plan à la distance l_1 donnée par la formule de Descartes

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{l_1} = \frac{1}{f}.$$

Nous en tirons

$$l_1 = \frac{d_1 f}{d_1 - f}.$$

La distance l_1 est supérieure à la distance $l = f$. Il faut donc éloigner la plaque de l'objectif d'une longueur

$$l_1 - l = \frac{d_1 f}{d_1 - f} - f, \qquad l_1 - l = \frac{f^2}{d_1 - f}.$$

Numériquement : $f = 7{,}5$ cm, $d_1 = 1{,}5$ m ou 150 cm.

$$l_1 - l = \frac{7{,}5^2}{150 - 7{,}5} = \frac{56{,}25}{142{,}5},$$

$$l_1 - l = \mathbf{0{,}395\ cm.}$$

3° Lorsqu'on accole à l'objectif L une lentille, L′, de distance focale f', l'appareil doit donner d'un objet AB placé à la distance $d_2 < d_1$ une image nette sur la plaque à la distance l_1 du système. Il faut donc que l'image intermédiaire, A_1B_1, fournie par la lentille L′ (image jouant le rôle d'objet réel pour l'objectif), soit située à la distance d_1 de celui-ci.

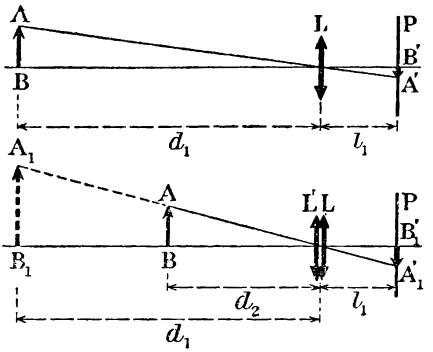


Fig. 2.

La distance focale f' est donnée par la formule de Descartes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle $p = +d_2$ (objet réel), $p' = -d_1$ (image virtuelle) et $f = f'$.

Cette formule devient

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{-d_1} = \frac{1}{f'},$$

d'où nous tirons

$$f' = \frac{d_1 d_2}{d_1 - d_2}.$$

Comme $d_1 > d_2$, la distance focale f' est positive : la lentille L′ doit être convergente.

Le grandissement linéaire de L′ est donnée par la seconde formule de Descartes :

$$\gamma = -\frac{p'}{p} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Ce grandissement est positif : l'image A_1B_1 fournie par cette lentille L′ est droite par rapport à l'objet AB.

L'image $A'_1B'_1$ fournie par le système L + L′ est aussi droite par rapport à A′B′ fournie par l'objectif L seul (fig. 2).

Dans le cas du système L + L′ nous avons $\frac{A'_1B'_1}{AB} = \frac{l_1}{d_2}$.

Dans le cas de l'objectif L seul nous avons $\frac{A'B'}{AB} = \frac{l_1}{d_1}$.

Par suite le rapport des dimensions des deux images est, pour la même grandeur de l'objet, $\frac{A'_1B'_1}{A'B'} = \frac{d_1}{d_2}$. Il est égal au grandissement γ de la lentille L′.

Application numérique : $d_1 = 150$ cm, $d_2 = 75$ cm.

$$f' = \frac{150 \times 75}{150 - 75}, \qquad f' = \mathbf{150\ cm},$$

$$\frac{A'_1B'_1}{A'B'} = \gamma = \frac{150}{75}, \qquad \frac{\mathbf{A'_1B'_1}}{\mathbf{A'B'}} = \mathbf{2}.$$

L'image du détail fournie par l'ensemble des deux lentilles est deux fois plus grande que celle qui est fournie par l'objectif seul.

Remarque.

On livre avec la plupart des appareils des lentilles analogues à la précédente, qui sont utilisées de la même façon, pour photographier les détails des objets. On leur donne le nom de *bonnettes à portraits.*

CHAPITRE IX

Œil.
Correction des anomalies de la vision.

31. — Œil : correction de la myopie.

Un myope a pour distance de *punctum remotum* 31 cm et pour distance de *punctum proximum* 11 cm.

1° Donner la distance focale des verres qu'il doit employer pour voir nettement sans accommoder à l'infini.

On supposera le centre optique de chaque œil à 1 cm derrière le centre optique du verre correspondant.

2° Quel est le *punctum proximum* de ce myope muni de ces verres ? Pourra-t-il voir nettement sans discontinuer (avec le secours de ces verres quand cela sera nécessaire) un objet qui s'avancerait vers lui, depuis l'infini jusqu'à 11 cm de son œil ?

3° Soit α l'angle sous lequel un œil normal verrait un objet AB situé à l'infini. Soit α', l'angle sous lequel le myope le voit à travers ses verres, toujours placés à 1 cm devant ses yeux. Quelle est la valeur du rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$?

On confondra les angles exprimés en radians avec leurs tangentes.

(Poitiers.)

1° Représentons l'œil réduit du myope par une lentille convergente mince, l, de centre optique O, que nous plaçons à une distance fixe, OH, d'un plan (Q) figurant la rétine (fig. 1).

Soit P le punctum proximum de l'œil, situé sur l'axe optique de la lentille l, à une distance $OP = \delta$ de son centre optique : δ est la distance minimale de vision distincte de l'œil myope.

Soit R le punctum remotum de l'œil, situé à la distance $OR = \Delta$ de son centre optique.

Désignons par a la distance du verre correcteur, L, à l'œil.

L'œil myope apercevra nettement, sans accommoder, un point A situé à l'infini sur l'axe, si le verre correcteur donne du point A une image A′ virtuelle située au punctum remotum, R, c'est-à-dire à la

distance $\Delta - a$ du point C. Le foyer principal image, F', de cette lentille doit se confondre avec le point R. Le verre correcteur est donc divergent et sa distance focale f est, en valeur absolue,

$$f = \Delta - a.$$

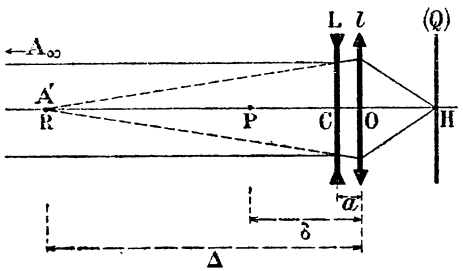


Fig. 1.

Numériquement : $\Delta = 31$ cm, $a = 1$ cm.

$$= 31 - 1, \qquad f = 30 \text{ cm}.$$

2° Soit δ' la distance minimale de vision distincte du myope muni de ses verres. La lentille divergente donne d'un point A_1 situé à la distance δ' de l'œil, c'est-à-dire à la distance $\delta' - a$ du centre optique C de L, une image virtuelle A'_1 située à la distance $CA'_1 = \delta - a$ de ce point (fig. 2).

Le punctum proximum P' du myope muni de ses verres se trouve au point A_1.

Sa distance à l'œil, δ', est donnée par la formule de Descartes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

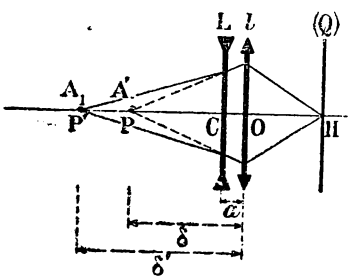


Fig. 2.

dans laquelle

$$p = +(\delta' - a) \quad \text{(objet réel)},$$
$$p' = -(\delta - a) \quad \text{(image virtuelle)},$$
$$f = -(\Delta - a) \quad \text{(lentille divergente)}.$$

Cette distance satisfait à l'équation

$$\frac{1}{\delta' - a} - \frac{1}{\delta - a} = -\frac{1}{\Delta - a}.$$

Nous en tirons

$$\delta' = a + \frac{(\Delta - a)\ (\delta - a)}{\Delta - \delta}.$$

Application numérique : $\Delta = 31$ cm, $\delta = 11$ cm, $a = 1$ cm.

$$\delta' = 1 + \frac{(31 - 1)\ (11 - 1)}{31 - 11} = 1 + 15,$$

$$\delta' = \mathbf{16\ cm.}$$

Si nous considérons un objet qui se déplace de l'infini jusqu'à 11 cm de l'œil, nous trouvons les résultats suivants :

depuis l'infini jusqu'à 31 cm, le myope ne verra nettement l'objet qu'avec ses verres;

depuis 31 cm jusqu'à 16 cm, le myope verra nettement l'objet avec ses verres ou sans ses verres;

depuis 16 cm jusqu'à 11 cm, le myope ne verra nettement l'objet que sans ses verres.

3° Soit α l'angle sous lequel un œil normal verrait un objet AB à l'infini.

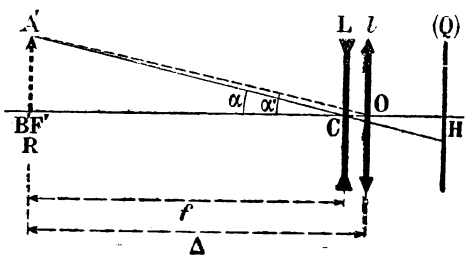


Fig. 3.

La lentille correctrice donne de AB une image, A'B', située dans son plan focal image (fig. 3).

L'œil, situé à la distance Δ de A'B', voit cette image sous l'angle α' tel que

$$\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{A'B'}{\Delta}.$$

Mais, dans le triangle CA'B', nous avons

$$A'B' = f \times \operatorname{tg} \alpha \approx f\alpha,$$

d'où $\alpha' = \dfrac{f\alpha}{\Delta}$ et $\dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{f}{\Delta} = \dfrac{\Delta - a}{\Delta}.$

Numériquement :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{31 - 1}{31},$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{30}{31}.$$

Le myope voit donc l'objet à l'infini sous un diamètre apparent plus petit à travers ses verres que sans ses verres.

32. — Œil : correction de la presbytie.

Un presbyte dont la distance minimale de vision distincte est 1,20 m veut lire à une distance de 30 cm.

1° Quelle est la convergence des lentilles qu'il doit employer ? L'œil est supposé contre la lentille.

2° S'il ne dispose que de lentilles de 36 cm de distance focale, à quelle distance de l'œil devra-t-il les placer pour voir le mieux possible le livre situé toujours à 30 cm de l'œil ?

(Paris.)

1° Représentons l'œil du presbyte par une lentille convergente de centre optique O, que nous plaçons à une distance fixe OH d'un plan (Q) figurant la rétine (fig. 1).

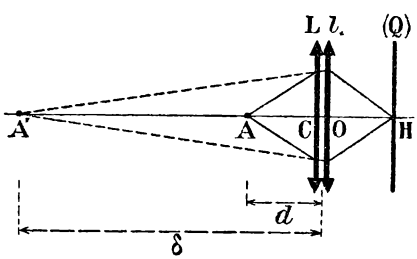


Fig. 1.

Le presbyte, dont le punctum proximum est à la distance δ, veut lire un livre situé à la distance $d < \delta$ de son œil. Le verre correcteur, L, doit donc donner du point A de ce livre, situé sur l'axe à la distance d de son centre optique (œil contre le verre), une image virtuelle, A', située au punctum proximum.

La distance focale f de ce verre est donnée par la formule de Descartes

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle $p = +d$ (objet réel) et $p' = -\delta$ (image virtuelle) :

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{-\delta} = \frac{1}{f}.$$

Nous en tirons la convergence des verres correcteurs :

$$C = \frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} = \frac{\delta - d}{\delta d}.$$

La distance d étant inférieure à δ, la convergence est positive : les verres correcteurs doivent être des lentilles convergentes.

Application numérique : $d = 0{,}30$ m, $\delta = 1{,}20$ m.

$$C = \frac{1{,}20 - 0{,}30}{1{,}20 \times 0{,}30}.$$

$C = 2{,}5$ dioptries.

2° Soit L′ le verre correcteur de distance focale f' (fig. 2) et x la distance C′O de ce verre à l'œil.

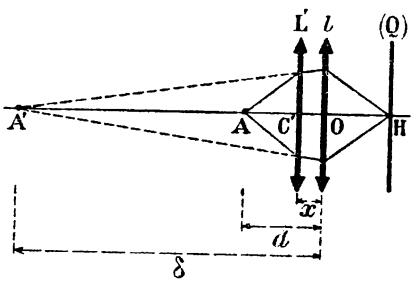


Fig. 2.

L'image virtuelle du livre donnée par L′ est à la distance

$$p' = -(\delta - x)$$

du centre optique C′ et le livre lui-même en est distant de $p = +(d - x)$.

La formule de Descartes donne

$$\frac{1}{d - x} + \frac{1}{-(\delta - x)} = \frac{1}{f'}.$$

La distance x est donnée par l'équation

$$(d - x)(\delta - x) = f'(\delta - d),$$

ou

$$x^2 - (\delta + d)x + \delta d - (\delta - d)f' = 0.$$

Numériquement : $f' = 36$ cm, $\delta = 120$ cm, $d = 30$ cm.

L'équation précédente devient

$$x^2 - (120 + 30)\,x + 120 \times 30 - (120 - 30)\,36 = 0$$

ou

$$x^2 - 150\,x + 360 = 0.$$

Cette équation a deux solutions :

$$x = 75 \pm \sqrt{75^2 - 360} = 75 \pm 72{,}56,$$

$$x' = 2{,}44 \text{ cm} \quad \text{et} \quad x'' = 147{,}56 \text{ cm}.$$

La plus grande racine est supérieure à 30 cm, distance de l'œil au livre : elle est à rejeter.

La distance de l'œil à la lentille L' est donc

$$x = 2{,}44 \text{ cm}.$$

33. — Œil : correction de la vue d'un myope devenu presbyte.

Un myope devenu presbyte a une vision telle que sa distance maximale de vision distincte est 100 cm, sa distance minimale de vision distincte 40 cm.

1° Quelle lentille L_1 faut-il monter comme verre de lunettes pour lui permettre de voir nettement à l'infini sans accommoder ? Calculer la convergence de L_1.

2° Pour obtenir la vision rapprochée à l'aide des mêmes lunettes on accole à la partie inférieure de chaque lentille L_1 une petite lentille convergente L_2. Quelle doit être la convergence de L_2 pour que la distance minimale de vision distincte des yeux regardant à travers les deux lentilles accolées soit ramenée à 20 cm ?

3° La lentille L_2 est biconvexe et ses deux faces ont même rayon de courbure R. Calculer R, sachant que l'indice du verre est $n = \frac{3}{2}$.

Nota. — On supposera que les centres optiques de L_1 et de L_2 coïncident avec celui d'une lentille fictive à laquelle on peut assimiler le système convergent de l'œil.

(Dijon.)

1° L'observateur voit nettement sans accommoder un objet à l'infini s'il se munit de verres correcteurs qui donnent de cet objet une image virtuelle située à la distance maximale de vision distincte, Δ. Le centre optique de l'œil coïncidant avec celui du verre correcteur, le foyer principal image de celui-ci doit être situé au punctum remotum. Ce verre doit être divergent et sa distance focale est

$$f_1 = -\Delta.$$

Sa convergence est donc

$$C_1 = -\frac{1}{\Delta}.$$

Numériquement : $\Delta = 100$ cm ou 1 m, $C_1 = -1$ **dioptrie.**

2° Désignons par f_2 la distance focale de la lentille L_2 et par C_2 sa convergence.

L'ensemble des deux lentilles accolées est équivalent à une lentille unique, L, dont la distance focale f est donnée par le théorème des convergences :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

La convergence C de L est donc

$$C = C_1 + C_2.$$

Cette lentille doit donner d'un objet AB placé à la distance donnée $d = 20$ cm, une image A'B', virtuelle, à la distance minimale de vision distincte.

La formule de position de Descartes donne

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{-\delta} = \frac{1}{f}.$$

Comme $\frac{1}{f} = C$, nous avons $\frac{1}{d} + \frac{1}{-\delta} = C_1 + C_2$.

Nous en tirons $C_2 = \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} - C_1$.

Application numérique :

$d = 20$ cm ou 0,20 m, $\delta = 40$ cm ou 0,40 m, $C = -1$ dioptrie.

$$C_2 = \frac{1}{0{,}20} - \frac{1}{0{,}40} + 1,$$

$$\mathbf{C_2 = 3{,}5 \text{ dioptries.}}$$

Le verre correcteur doit être convergent (convergence positive).

3° La convergence de la lentille L_2 est

$$C_2 = \frac{1}{f_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{2(n-1)}{R}.$$

D'où nous tirons $R = \frac{2(n-1)}{C_2}$.

Numériquement : $n = \frac{3}{2}$, $C_2 = 3{,}5$ dioptries.

$$R = \frac{2\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{3{,}5} = \frac{1}{3{,}5} = 0{,}286 \text{ m}.$$

$$\mathbf{R = 28{,}6 \text{ cm}.}$$

CHAPITRE X

Loupe. Oculaires.

34. — Loupe : puissance, grossissement, latitude de mise au point (œil normal et œil myope au foyer image).

Une lentille convergente L, de centre optique O, donne d'un objet réel situé à 10 cm de O une image réelle également située à 10 cm de O.

1° Calculer la distance focale de cette lentille.

2° L est utilisée comme loupe par un observateur plaçant le centre optique de son œil au foyer image de la lentille ; sa vue est normale, sa distance minimale de vision distincte, δ, est 20 cm. Où faut-il placer un objet AB pour qu'il soit vu à travers la lentille :

***a*) sans accommodation ;**

***b*) avec l'accommodation maximale ?**

Tracer dans chacun des cas la marche d'un pinceau de rayons lumineux pénétrant dans l'œil. Quelle est la latitude de mise au point de la loupe L ?

3° Montrer que la valeur de la puissance de la loupe L est la même dans les cas *a*) et *b*). Calculer cette valeur ainsi que celle du grossissement commercial, en admettant que l'on peut confondre la valeur de la tangente avec celle de l'arc exprimé en radian.

4° L'observateur est myope, son punctum remotum est 65 cm, son punctum proximum 10 cm. Calculer la nouvelle latitude de mise au point de la loupe pour cet observateur ; la mise au point est-elle plus aisée pour l'observateur myope que pour l'observateur à vue normale ?

(Montpellier.)

1° L'objet et l'image sont réels et situés à la même distance d du centre optique de la lentille : cette distance est égale au double de la distance focale f :

$$d = 2f.$$

On en tire

$$f = \frac{d}{2}.$$

Numériquement : $d = 10$ cm,

$$= \mathbf{5\ cm.}$$

2° *a*) L'œil n'accommode pas : il voit l'image virtuelle A'B' de l'objet AB au punctum remotum, c'est-à-dire à l'infini. L'objet est alors dans le plan focal objet de la lentille et son pied se trouve en A_1, à la distance $p_1 = f$ du centre optique (fig. 1).

b) L'œil accommode au maximum : il voit l'image virtuelle au punctum proximum, c'est-à-dire à la distance minimale de vision distincte, δ, de l'œil. Le pied de l'image est en A' à une distance du centre optique égale à $\delta - f$ en valeur absolue (fig. 2).

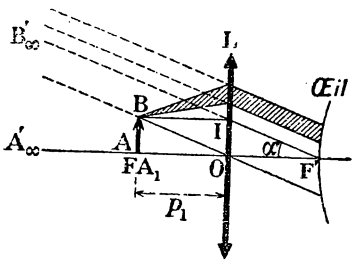


Fig. 1.

Le pied de l'objet est en A_2 à une distance p_2 du centre optique donnée par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle $p'_2 = -(\delta - f)$ (image virtuelle).

Nous en tirons $p_2 = \dfrac{p'_2 f}{p'_2 - f} = \dfrac{-(\delta - f)f}{-(\delta - f) - f}$,

ou $$p_2 = \frac{(\delta - f)f}{\delta}.$$

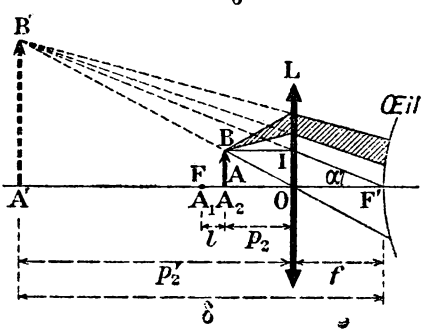


Fig. 2.

La latitude de mise au point de la loupe est le déplacement que l'on peut donner à cet instrument, par rapport à l'objet, pour que l'image reste dans le champ de vision distincte. Elle est égale à la différence des distances p_1 et p_2 :

$$l = p_1 - p_2.$$

Application numérique : $f = 5$ cm, $\delta = 20$ cm.

Première position de l'objet : $p_1 = \mathbf{5\ cm.}$

Deuxième position de l'objet : $p_2 = \frac{(20-5)5}{20}$, $p_2 = \mathbf{3{,}75\ cm.}$

Latitude de mise au point :

$$l = 5 - 3{,}75,$$
$$l = \mathbf{1{,}25\ cm.}$$

Nous avons représenté, sur les figures 1 et 2, la marche d'un pinceau lumineux dans les deux cas.

Remarque.

Nous obtenons une expression particulièrement simple de la latitude de mise au point de la loupe pour un œil normal situé au foyer image de l'oculaire, en exprimant p_1 et p_2 en fonction de f et de δ :

$$l = f - \frac{(\delta - f)f}{\delta},$$
$$l = \frac{f^2}{\delta}.$$

Cette expression s'obtient immédiatement en appliquant la formule de Newton, $xx' = f^2$, à l'oculaire, les distances x et x' étant prises en valeur absolue. L'objet situé à la distance $x = l$ du foyer objet F donne en effet une image à une distance $x' = \delta$ du foyer image F' : $l\delta = f^2$ ou $l = \frac{f^2}{\delta}$.

3° *Calcul de la puissance.*

La puissance P de la loupe est, par définition, le rapport du diamètre apparent α' de l'image à la grandeur AB de l'objet :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}.$$

P est exprimée en dioptries si α' est exprimé en radians et AB en mètres.

Si l'angle α' est petit, nous pouvons le confondre avec sa tangente :

$$\alpha' = \operatorname{tg} \alpha'.$$

a) La figure 1 donne

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{OI}{OF'} = \frac{AB}{f}.$$

La puissance a la valeur P_1 donnée par l'expression

$$P_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{AB} = \frac{\frac{AB}{f}}{AB} = \frac{1}{f}.$$

b) La figure 2 donne

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{A'B'}{A'F'} = \frac{OI}{OF'} = \frac{AB}{f}.$$

La puissance a la valeur P_2 donnée par l'expression

$$P_2 = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{AB} = \frac{1}{f}.$$

La puissance est la même dans les deux cas et égale à la convergence de la lentille.

Une démonstration identique pourrait être faite pour toute position de l'objet comprise entre les points A_1 et A_2, lorsque l'œil se trouve au foyer image de la loupe.

Cette valeur particulière de la puissance, indépendante de la position de l'objet et de la vue de l'observateur, porte le nom de *puissance intrinsèque* de la loupe. On la désigne par P_i.

Calcul du grossissement commercial.

Le grossissement de la loupe est, par définition, le rapport du diamètre apparent, α', de l'image au diamètre apparent, α, de l'objet, vu à l'œil nu dans les meilleures conditions (objet au punctum proximum) :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Le diamètre apparent α de l'objet est, dans ces conditions,

$$\alpha = \frac{AB}{\delta}.$$

D'où l'expression suivante du grossissement :

$$G = \frac{\alpha'}{\frac{AB}{\delta}} = \frac{\alpha'}{AB} \times \delta,$$

$$G = P \times \delta.$$

Le grossissement est le produit de la puissance, exprimée en dioptries, par la distance minimale de vision distincte, exprimée en mètres

Par définition, le grossissement commercial, G_c, est calculé en prenant pour P la puissance intrinsèque, P_i, et pour δ la distance $\delta = 25$ cm $= 0{,}25$ m :

$$G_c = P_i \times 0{,}25,$$

$$G_c = \frac{P_i}{4}.$$

Numériquement : $f = 5$ cm ou 0,05 m, $P_i = \frac{1}{0{,}05} = 20$ dioptries.

$$G_c = \frac{20}{4},$$

$$\mathbf{G_c = 5.}$$

4° Désignons par p_1 et par p'_1 les distances de l'objet et de l'image à la loupe, dans le cas de l'observateur myope regardant l'image sans accommoder. Celle-ci se trouve alors au punctum remotum situé à la distance Δ de l'œil.

La distance p_1 est donnée par la formule de Descartes

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle $p'_1 = -(\Delta - f)$ (image virtuelle).

Nous en tirons $$p_1 = \frac{p'_1 f}{p'_1 - f}$$

ou $$p_1 = \frac{(\Delta - f)f}{\Delta}.$$

Désignons de même par p_2 et p'_2 les distances de l'objet et de l'image à la loupe dans le cas de l'observateur myope regardant l'image en accommodant au maximum. Celle-ci se trouve au punctum proximum situé à la distance δ de l'œil.

La distance p'_2 est $p'_2 = -(\delta - f)$ (image virtuelle).

Par un calcul identique au précédent, nous trouvons

$$p_2 = \frac{(\delta - f)f}{\delta}.$$

La latitude de mise au point est

$$l' = p_1 - p_2 = \frac{(\Delta - f)f}{\Delta} - \frac{(\delta - f)f}{\delta},$$

$$l' = \frac{f^2(\Delta - \delta)}{\Delta \times \delta}. \qquad (1)$$

Application numérique : $f = 5$ cm, $\Delta = 65$ cm, $\delta = 10$ cm.

$$l' = \frac{5^2(65 - 10)}{65 \times 10},$$

$$\mathbf{l' = 2{,}11\ cm.}$$

Si nous comparons cette latitude de mise au point à celle de l'œil normal placé dans les mêmes conditions (au foyer image), nous voyons

que l'œil myope dispose d'une plus grande distance pour effectuer la mise au point (2,11 cm au lieu de 1,25 cm). La mise au point sera plus aisée pour l'observateur myope que pour l'observateur à vue normale.

Remarque. — La formule (1) contient comme cas particulier l'expression de la latitude de mise au point pour l'œil normal. L'expression (1) peut s'écrire

$$l' = p_1 - p_2 = f^2\left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\Delta}\right).$$

Si $\Delta = \infty$, on obtient

$$l' = \frac{f^2}{\delta} = l.$$

35. — Loupe : puissance, grossissement, grandissement. (Œil normal hors du foyer image.)

Une loupe est constituée par une lentille mince dont la convergence est égale à 20 dioptries.

1° Quelle est la puissance de cette loupe dans le cas où l'œil se place à 5 cm derrière la lentille ? Cette puissance varie-t-elle avec la position de l'image observée ?

2° L'œil se trouvant à 2,5 cm derrière la lentille, sous quel angle voit-on l'image d'un petit objet de 1 mm de longueur, perpendiculaire à l'axe, situé à 7 cm de l'œil ? Quelle est, dans ce cas, la puissance de la loupe ?

3° En supposant l'œil normal (distance minimale de vision distincte égale à 25 cm), quel est, dans les deux cas, le grossissement obtenu ?

4° L'œil normal se trouvant encore à 2,5 cm derrière la loupe, où doit-on placer l'objet pour que le grossissement soit égal au grandissement? Quels sont, dans ces conditions, le grossissement et la puissance de la loupe ?

5° Quelle lentille mince doit-on accoler à la loupe pour réduire sa puissance intrinsèque au $\frac{1}{4}$ de sa valeur ?

(Lyon.)

1° La loupe est constituée par une lentille mince de convergence C = 20 dioptries. Sa distance focale, mesurée en mètres, est l'inverse de sa convergence exprimée en dioptries :

$$f = \frac{1}{C}.$$

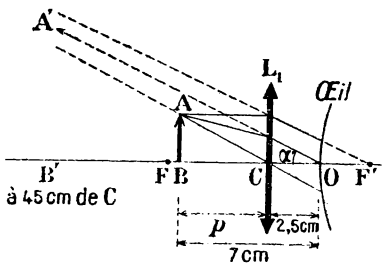
Numériquement : $f = \frac{1}{20} = 0{,}05$ m ou 5 cm.

L'œil, placé à 5 cm derrière la lentille, est au foyer image de celle-ci.

La puissance de la loupe est donc sa puissance intrinsèque P_i. Elle est indépendante de la position de l'image observée et égale à la convergence de la lentille (problème 42) :

$$P_i = 20 \text{ dioptries.}$$

2° L'image A'B' de l'objet examiné AB est virtuelle. L'angle α'



sous lequel on voit l'image (diamètre apparent de l'image) est donné par l'expression

$$\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{A'B'}{d},$$

étant la distance de l'image A'B' à l'œil.

Calcul de d.

La distance de l'objet à la lentille est égale à $7 - 2{,}5 = 4{,}5$ cm en valeur absolue. Son image A'B' est à une distance p' de la lentille donnée par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle $p = +4{,}5$ cm (objet réel).

Nous en tirons $$p' = \frac{pf}{p - f}.$$

Numériquement : $$p' = \frac{4{,}5 \times 5}{4{,}5 - 5} = -45 \text{ cm}.$$

L'image A'B' est donc bien virtuelle ($p' < 0$).
La distance d est

$$d = |p'| + 2{,}5,$$

$$d = 47{,}5 \text{ cm}.$$

Calcul de A'B'.

Le grandissement linéaire est donné par la formule de Descartes,

$$\gamma = -\frac{p'}{p}.$$

L'image A'B' a pour longueur

$$A'B' = AB \times |\gamma|.$$

Numériquement :

$p = 4{,}5$ cm, $p' = -45$ cm, AB = 1 mm ou 0,1 cm.

$$\gamma = -\frac{-45}{4{,}5} = +10.$$

L'image est droite par rapport à l'objet.

$$A'B' = 0{,}1 \times 10 = 1 \text{ cm}.$$

Le diamètre apparent de l'image est donc

$$\alpha' = \frac{A'B'}{d} = \frac{1}{47{,}5},$$

$$\alpha' = \mathbf{0{,}021\ 05\ radian.}$$

La puissance de la loupe est donnée par l'expression

$$P = \frac{\alpha'}{AB}.$$

P est exprimée en dioptries si α' est exprimé en radians et AB en mètres.

Numériquement : P = 0,021 05 dioptrie, AB = 1 mm ou 0,001 m.

$$P = \frac{0{,}021\ 05}{0{,}001} = 21{,}05 \text{ dioptries},$$

$$\mathbf{P \approx 21\ dioptries.}$$

3° Le grossissement de la loupe est égal au produit de sa puissance exprimée en dioptries par la distance minimale de vision distincte de l'observateur mesurée en mètres (problème 34) :

$$G = P \times \delta.$$

a) 1er *cas.* — La puissance de la loupe est sa puissance intrinsèque P_i. La distance minimale de vision distincte est égale à 25 cm. Le grossissement de la loupe est, dans ce cas, son grossissement commercial G_c (problème 34) :

$$G_c = P_i \times 0{,}25 = \frac{20}{4},$$

$$\mathbf{G_c = 5.}$$

b) 2e *cas.* — P = 21,05 dioptries, $\delta = 0{,}25$ m.

$$G = 21{,}05 \times 0{,}25,$$

$$\mathbf{G = 5{,}26.}$$

4° Le grossissement de la loupe a pour expression

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha},$$

α' étant le diamètre apparent de l'image et α celui de l'objet vu dans les meilleures conditions (objet au punctum proximum).

Le diamètre apparent α' de l'image est

$$\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{A'B'}{d}.$$

Le diamètre apparent α de l'objet, dans les meilleures conditions est

$$a \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{\delta}.$$

Le grossissement de la loupe a pour expression

$$G = \frac{\dfrac{A'B'}{d}}{\dfrac{AB}{\delta}} = \frac{A'B'}{AB} \times \frac{\delta}{d}.$$

Le premier terme, $\dfrac{A'B'}{AB}$, est égal au grandissement linéaire γ, pris en valeur absolue.

Si l'on veut avoir $G = \dfrac{A'B'}{AB}$, il faut poser

$$\frac{A'B'}{AB} \times \frac{\delta}{d} = \frac{A'B'}{AB},$$

ce qui implique

$$d = \delta.$$

La distance d'observation doit être égale à la distance minimale de vision distincte.

L'œil étant à 2,5 cm derrière la loupe, cette condition est satisfaite si l'objet AB se trouve à une distance p_1 de la loupe telle que l'image A'B' en soit à la distance

$$p'_1 = -(\delta - 2{,}5) = -(25 - 2{,}5) = -22{,}5 \text{ cm}.$$

La distance p_1 est donnée par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f}.$$

On en tire

$$p_1 = \frac{p'_1 f}{p'_1 - f}.$$

Le grandissement est alors

$$\gamma = -\frac{p'_1}{p_1} = -\frac{p_1' - f}{f} = \frac{f - p'_1}{f}.$$

Numériquement : $f = 5$ cm, $p'_1 = -22{,}5$ cm (image virtuelle).

$$\gamma = \frac{5 - (-22{,}5)}{5} = \frac{27{,}5}{5} = 5{,}5.$$

L'image est droite par rapport à l'objet. Le grossissement, égal au grandissement pris en valeur absolue, est donc

$$\mathbf{G = 5{,}5.}$$

La puissance, liée au grossissement par la relation $G = P \times \delta$, a pour valeur

$$P = \frac{G}{\delta},$$

ou

$$P = \frac{5{,}5}{0{,}25}, \qquad \mathbf{P = 22 \text{ dioptries.}}$$

5° Si l'on associe à la lentille L_1 de distance focale f une lentille L_2 de distance focale x, l'ensemble des deux lentilles aura une distance focale f' telle que

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x}.$$

La puissance intrinsèque du système est $P'_i = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{x}$.

Celle de la lentille L_1 seule est $P_i = \frac{1}{f}$.

On veut que la puissance P'_i soit $\frac{1}{4}$ de la puissance P_i.

On devra écrire

$$P'_i = \frac{P_i}{4},$$

ou

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4f}.$$

On déduit x de cette expression :

$$x = -\frac{4f}{3}.$$

La lentille L_2 doit être divergente et sa distance focale sera, en valeur absolue,

$$|x| = \frac{4 \times 5}{3},$$

$$|x| = \mathbf{6{,}66\ cm.}$$

36. — Loupe : champ en largeur.

Un observateur à vue normale, voulant voir l'image grossie d'une portion d'un plan P normal à la direction d'observation, tient une lentille mince convergente, parallèle au plan, et la déplace jusqu'à voir nettement, sans accommodation, l'image virtuelle du plan.

1° La lentille ayant une convergence de 2,5 dioptries, donner la distance de la lentille au plan. Construire la marche d'un faisceau issu d'un point quelconque du plan P, et tracer en particulier le rayon qui, après la traversée de la lentille, passe par l'œil O, supposé réduit à un point.

2° La distance du plan à l'œil étant 1 mètre, calculer le rapport de l'angle α sous lequelle l'observateur voit un segment de droite du plan P, à travers la lentille, à l'angle α sous lequel il voit le même segment à l'œil nu, à la même distance.

Donner la valeur du grossissement dans le cas où l'observateur utilise une lentille de n dioptries, la distance de l'œil au plan restant égale à 1 mètre, puis dans le cas le plus général où cette distance est m mètres.

3° Pour l'une quelconque des observations précédentes, la lentille utilisée ayant un diamètre d, le plan se divise en trois régions :

a) les points extérieurs à un cercle de diamètre d_1 sont vus à l'œil nu, parce que les rayons qui en émanent pour aboutir à l'œil ne rencontrent pas la lentille;

b) les points intérieurs à un cercle de diamètre d_2 sont vus à travers la lentille ;

c) les points situés dans la couronne intermédiaire sont invisibles.

Calculer le rapport et la différence des diamètres d_1 et d_2.

(*Rennes.*)

1° L'observateur à vue normale n'accommodant pas voit à l'infini l'image virtuelle du plan objet P. Ce plan objet P doit coïncider avec le plan focal objet de la lentille L. La distance d du plan P à la lentille L est alors égale à la distance focale f.

La convergence C de la lentille, mesurée en dioptries, étant l'inverse de sa distance focale, mesurée en mètres, on aura donc

$$d = f = \frac{1}{C}.$$

Numériquement : $C = 2{,}5$ dioptries, $f = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}40$ m.

$$d = \mathbf{40\ cm.}$$

Un point A du plan P est un foyer secondaire objet de la lentille (fig. 1). Tous les rayons issus de A tombant sur la lentille émergent parallèlement à l'axe secondaire CA, en particulier le rayon qui arrive à l'œil et qui rencontre la lentille en J. Le rayon incident qui émerge suivant JO est donc AJ.

2° Le segment FA (fig. 1) est vu à travers la lentille sous l'angle $\alpha' = \frac{CJ}{OC} = \frac{FA}{CF} = \frac{FA}{f}$.

Le segment FA est vu à l'œil nu à la distance OF = 1 m sous l'angle $\alpha = \frac{FA}{OF}$. Si l'on ne peut disposer, comme on le suppose dans le problème, de la distance de l'objet à l'œil, les meilleures conditions

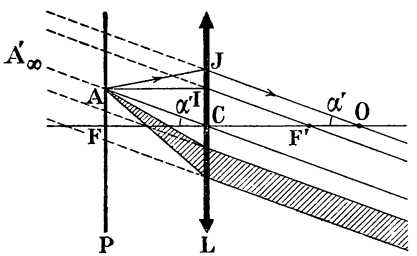


Fig. 1.

de vision de l'objet correspondent à la distance OF = 1 m. Le rapport $\frac{\alpha'}{\alpha}$ des deux angles définit le grossissement de la lentille jouant le rôle de loupe :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\frac{FA}{f}}{\frac{FA}{OF}} = \frac{OF}{f}.$$

Numériquement : OF = 1 m, f = 0,40 m.

$$G = \frac{OF}{f} = \frac{1}{0{,}40},$$

$$\mathbf{G = 2{,}5.}$$

Si la lentille a une convergence de n dioptries, sa distance focale est $f = \frac{1}{n}$ m. On a toujours, pour la vision à l'infini, $\alpha' = \frac{FA}{f}$ quelle

que soit la position de l'œil. Si la distance de l'œil au plan P est restée égale à 1 m, on aura encore $\alpha = \frac{FA}{OF}$ et, par suite,

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{OF}{f} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n.$$

$$\mathbf{G = n.}$$

Plus généralement, si la distance de l'œil de l'observateur au plan P est $OF = m$ mètres, α' gardant sa valeur $\alpha' = \frac{FA}{f}$, α aura la valeur $\alpha = \frac{FA}{OF} = \frac{FA}{m}$.

Le grossissement aura alors pour expression

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\frac{FA}{f}}{\frac{FA}{m}} = \frac{m}{f} = m \times n.$$

$$G = m \times n.$$

3° L'œil, étant placé en O à la distance m mètres du plan P, voit directement tous les points du plan situés en dehors du cercle de rayon FA_1 (fig. 2), le point A_1 étant déterminé par la droite joignant

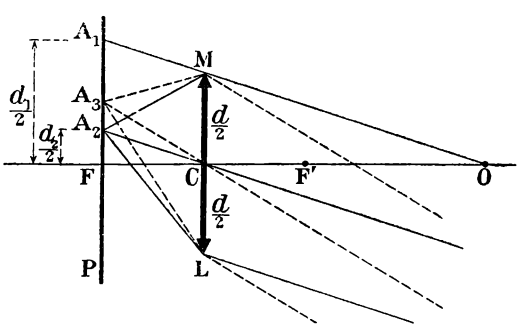


Fig. 2.

le bord M de la lentille au point O. Il existe en effet pour tout point hors de ce cercle un rayon qui atteint directement le point O sans rencontrer la lentille.

Le diamètre de ce cercle, $d_1 = 2\,FA_1$, s'obtient en utilisant les triangles semblables OFA_1 et OCM :

$$\frac{FA_1}{CM} = \frac{OF}{OC}, \qquad \frac{\frac{d_1}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{m}{m-f};$$

$$d_1 = \frac{d \times m}{m-f}. \tag{1}$$

Le diamètre du cercle visible à travers la lentille se détermine en considérant un point A d'abord en F, puis éloigné de F.

A étant en F le faisceau de rayons tombant sur la lentille émerge parallèlement à l'axe principal. Le point O est dans ce faisceau donc O voit le point A.

Si l'on éloigne le point A, le faisceau émergent est parallèle à l'axe secondaire CA. Tant que le point O reste dans le faisceau émergent, O voit le point A.

Pour une certaine position A_2 de A, le rayon passant par M et parallèle à l'axe secondaire CA_2 passe par O. Le point A_2 détermine le rayon du cercle visible à travers la lentille.

Le diamètre de ce cercle, $d_2 = 2\,FA_2$, s'obtient en utilisant les triangles semblables CFA_2 et OCM :

$$\frac{FA_2}{CM} = \frac{CF}{OC}, \qquad \frac{\frac{d_2}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{f}{m-f},$$

$$d_2 = \frac{d \times f}{m-f}. \tag{2}$$

Pour un point A situé entre A_2 et A_1 (A_3 par exemple) le point O ne se trouve plus dans le faisceau émergent. Le point A n'est pas visible de O. A_2A_1 est la largeur de la couronne contenant ces points invisibles.

Le rapport $\frac{d_1}{d_2}$ et la différence $d_1 - d_2$ s'obtiennent à partir des expressions (1) et (2).

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{d \times m}{m-f}}{\frac{d \times f}{m-f}} = \frac{m}{f},$$

$$d_1 - d_2 = \frac{d \times m}{m-f} - \frac{d \times f}{m-f} = d.$$

La figure 2 rend ce dernier résultat évident.

37. — Oculaire positif de Ramsden.

Un observateur à vue normale utilise comme loupe une lentille, L_1, de longueur focale 3 cm.

1° Calculer la puissance intrinsèque et le grossissement commercial de la loupe.

2° L'œil, dont le centre optique est situé au foyer image de la lentille, observe l'image nettement sans accommoder. De combien peut-on déplacer l'objet sans cesser d'en voir une image nette à travers la loupe ? Distance minimale de vision distincte : 25 cm.

3° A 2 cm de la lentille L_1, on place une deuxième lentille identique, L_2, dont l'axe principal coïncide avec celui de L_1. Où faut-il placer l'objet pour l'observer nettement à travers le système sans accommoder (œil normal) ?

L'objet est une petite droite AB, normale à l'axe du système, dont l'extrémité inférieure, B, se trouve sur cet axe. Construire la marche d'un pinceau lumineux issu du point A.

4° Calculer, dans les conditions du paragraphe précédent, la puissance du système.

(Clermont.)

1° La puissance intrinsèque d'une loupe de distance focale f est l'inverse de sa distance focale (problème 34) :

$$P_i = \frac{1}{f} \cdot$$

P_i est exprimée en dioptries si f est exprimée en mètres.

Le grossissement commercial de la loupe est par définition égal au produit de la puissance intrinsèque par la distance minimale de vision distincte, δ, prise égale à 0,25 m.

$$G_c = P_i \times 0{,}25 = \frac{1}{4f} \cdot$$

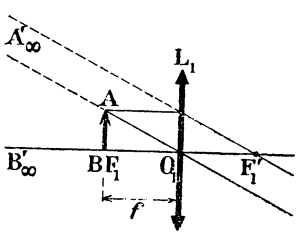


Fig. 1.

Numériquement :

$f = 3$ cm ou 0,03 m.

$$P_i = \frac{1}{0{,}03} = \frac{100}{3}, \quad \mathbf{P_i = 33{,}3 \text{ dioptries.}}$$

$$G_c = \frac{1}{4 \times 0{,}03} = \frac{100}{12}, \quad \mathbf{G_c = 8{,}33.}$$

Remarque. — La puissance de la loupe est égale à P_i dans les deux cas suivants :

a) objet dans le plan focal objet, œil en un point quelconque de l'axe optique (fig. 1) ;

b) œil au foyer image F'_1, objet entre le foyer principal objet et le centre optique (fig. 2).

2° La longueur dont on peut déplacer l'objet sans cesser d'en voir une image nette est la latitude de mise au point.

L'œil est normal et situé au foyer image de la loupe. La latitude de mise au point de la loupe pour cet œil, $l = F_1B$, est donnée par la formule (problème 34)

$$l = \frac{f^2}{\delta} .$$

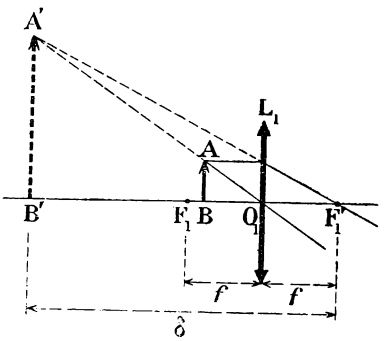


Fig. 2.

On obtient immédiatement cette dernière relation en appliquant à la lentille la formule de Newton $xx' = f^2$.

Numériquement :

$f = 3$ cm; $\delta = 25$ cm.

$$l = \frac{3^2}{25} = \frac{9}{25} \qquad l = \mathbf{0{,}36\ cm.}$$

3° L'œil normal n'accommodant pas et regardant l'objet AB à travers le système des deux lentilles voit son image A'B' à l'infini. L'objet AB doit donc être placé dans le plan focal objet du système.

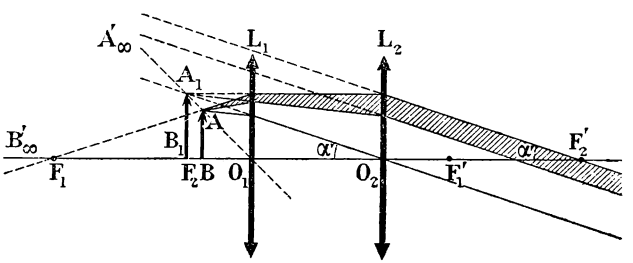


Fig. 3.

L'image A_1B_1 de AB fournie par la lentille L_1 doit se trouver dans le plan focal objet de la lentille L_2 donc à la distance $F_2O_1 = 1$ cm de la lentille L_1. AB doit donc être placé à une distance p de O_1 telle que l'image A_1B_1 fournie par L_1 soit virtuelle et à 1 cm de O_1 (fig. 3).

La formule de Descartes, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, donne

$$p = \frac{p'f}{p' - f} .$$

Numériquement : $p' = -1$ cm (image virtuelle), $f = 3$ cm.

$$p = \frac{(-1) \times 3}{(-1) - 3} = \frac{3}{4}, \qquad p = \mathbf{0{,}75\ cm.}$$

L'œil peut être placé n'importe où derrière la lentille L_2.

4° La puissance du système est par définition le rapport $P = \frac{\alpha'}{AB}$ du diamètre apparent α' de l'image à la grandeur AB de l'objet.

La figure 3 donne $\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{A_1B_1}{B_1O_2} = \frac{A_1B_1}{f}$.

$$P = \frac{A_1B_1}{AB} \times \frac{1}{f}.$$

$\frac{A_1B_1}{AB}$ est le grandissement de la lentille L_1 pris en valeur absolue.

Numériquement : $\frac{A_1B_1}{AB} = \left| -\frac{p'}{p} \right| = \frac{1}{0{,}75} = \frac{4}{3}$; $f = 3$ cm ou 0,03 m,

$$P = \frac{4}{3} \times \frac{1}{0{,}03} = \frac{400}{9},$$

$$\mathbf{P = 44{,}4\ dioptries.}$$

Le système de deux lentilles convergentes identiques, L_1 et L_2, distantes de $\frac{3}{2}f$, a pour la vision à l'infini une puissance supérieure à celle d'une lentille simple, L_1, utilisée dans les mêmes conditions. Ce système de deux lentilles plan-convexes, identiques, faces convexes en regard, séparées par une distance égale aux $\frac{2}{3}$ de leur distance focale commune, est l'oculaire de Ramsden. Cet oculaire est dit positif car il permet d'examiner directement à l'infini l'image d'un objet réel. Il permet en outre l'utilisation d'un réticule, que l'on peut disposer dans le plan de l'objet AB, c'est-à-dire dans le plan focal objet du système. C'est l'oculaire le plus courant des lunettes.

38. — Oculaire négatif d'Huygens.

Deux lentilles minces plan-convexes L_1 de distance focale 4,5 cm et L_2 de distance focale 1,5 cm ont leurs axes principaux confondus et sont situées à 3 cm l'une de l'autre.

1° Placer les foyers objets F_1 et F_2, les foyers images F'_1 et F'_2 des deux lentilles. La lentille L_1 reçoit un faisceau de rayons parallèles à l'axe principal. Déterminer le point F' de convergence des rayons émergents correspondants. Donner sa dis-

tance à L_2. Ce foyer image de l'ensemble est-il réel ou virtuel ? Tracer la marche d'un pinceau lumineux à travers le système.

2° La lentille L_1 reçoit un faisceau de rayons issus d'un point F de l'axe principal. Déterminer la position de F pour que le faisceau émergent soit constitué par des rayons parallèles à l'axe. Ce foyer objet de l'ensemble est-il réel ou virtuel ? Donner sa distance à L_1 et tracer la marche d'un pinceau lumineux à travers le système.

3° Peut-on observer à l'infini l'image donnée par le système d'un petit objet plan AB, l'œil étant placé derrière L_2 ?

4° L'ensemble L_1 et L_2 est utilisé comme oculaire d'un instrument. Un objectif associé donne de l'objet une image AB. L'observateur est placé comme précédemment, visant à l'infini l'image définitive. Quelle est en dioptries la puissance de cet oculaire ?

(*Nancy.*)

1° Désignons par f_1 et f_2 les distances focales des deux lentilles, prises en valeur absolue.

Nous avons placé sur la figure 1 les foyers objets F_1 et F_2 et les foyers images F_1' et F_2' de ces lentilles.

Les rayons parallèles à l'axe principal viennent, après réfraction par la lentille L_1, converger en F_1', foyer principal image de L_1 qui coïncide avec F_2', foyer principal image de L_2. Ce point joue le rôle d'objet virtuel pour la lentille L_2. Celle-ci en donne une image au point F' dont la distance p' à O_2 satisfait à la formule de Descartes,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle $p = -f_2$ (objet virtuel) et $f = +f_2$ (lentille convergente).

La distance p' est donnée par l'équation

$$\frac{1}{-f_2} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2},$$

d'où nous tirons

$$p' = \frac{f_2}{2}.$$

Numériquement : $f_2 = 1{,}5$ cm.

$$p' = \frac{1{,}5}{2}, \qquad p' = \mathbf{0{,}75\ cm.}$$

F', point de convergence des rayons incidents parallèles à l'axe principal du système, est le foyer principal image du système.

Ce foyer, situé au-delà de L_2, à 0,75 cm de L_2, est un point réel.

Construction géométrique de ce point (fig. 1).

Le rayon SI_1 parallèle à l'axe principal subit du fait de la lentille L_1 une première réfraction suivant I_1F_1'. La partie réelle I_1I_2 de ce rayon subit du fait de la lentille L_2 une deuxième réfraction suivant I_2F'. I_1I_2 coupe le plan focal objet de L_2 en H (foyer secondaire objet de L_2) et se réfracte suivant I_2S', parallèlement à HO_2.

Le rayon XO_1 passant par les centres optiques ne subit pas de déviation et émerge suivant O_2X'. L'intersection des rayons I_2S' et O_2X' est le point F'.

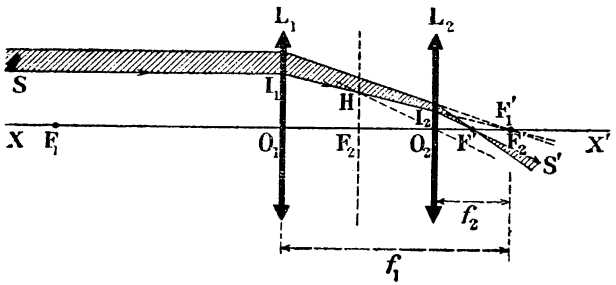


Fig. 1.

La marche d'un pinceau lumineux est indiquée sur la figure 1.

2° Pour obtenir à la sortie de L_2 un faisceau de rayons parallèles à l'axe du système il faut que le faisceau tombant sur L_2 provienne de F_2 foyer principal objet de L_2. Ce point doit être l'image réelle d'un point F, fournie par la lentille L_1 et dont la distance p_1 à L_1 est donnée par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f},$$

dans laquelle (voir fig. 2)

$$p_1' = O_1F_2 = +(a - f_2) \quad \text{(image réelle)}$$

et $$f = +f_1 \quad \text{(lentille convergente)}.$$

La distance p_1 est donnée par l'équation

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{a - f_2} = \frac{1}{f_1},$$

d'où nous tirons

$$p_1 = \frac{f_1 (a - f_2)}{a - f_1 - f_2}.$$

Numériquement : $f_1 = 4{,}5$ cm; $a = 3$ cm; $f_2 = 1{,}5$ cm.

$$p_1 = \frac{4{,}5\,(3 - 1{,}5)}{3 - 4{,}5 - 1{,}5}. \qquad p_1 = \mathbf{-\,2{,}25\ cm.}$$

F point objet tel que le faisceau émergent soit parallèle à l'axe du système est le foyer principal objet du système. Ce foyer, situé entre L_1 et L_2, à 2,25 cm de L_1, est un point virtuel.

La construction géométrique de ce point est donnée par la figure 2.

Le rayon I_2S' parallèle à l'axe principal provient du rayon I_1I_2 passant par F_2 foyer principal objet de L_2. Ce rayon I_1I_2 prolongé coupe le plan focal image de L_1 en K (foyer secondaire image de L_1). Le rayon incident SI_1, qui se réfracte suivant I_1I_2, est parallèle à l'axe secondaire O_1K.

D'autre part le rayon O_2X', qui passe par les centres optiques et n'a pas subi de déviation, provient du rayon XO_1.

L'intersection de ces deux rayons incidents SI_1 et XO_1 est le point F.

La marche d'un pinceau est indiquée sur la figure 2.

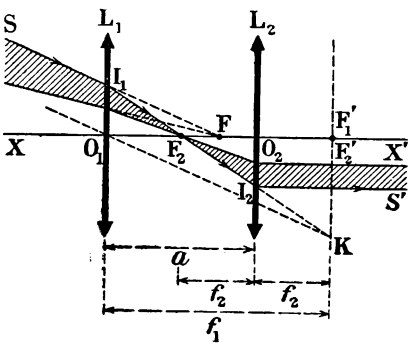


Fig. 2.

3° Pour que l'image A'B' de l'objet AB soit à l'infini, il faut que cet objet AB soit placé dans le plan focal objet du système. Ce plan est virtuel. On ne pourra donc pas observer directement l'image à l'infini d'un objet réel AB.

Mais on pourra faire cette observation si l'on s'arrange, grâce à une lentille convergente par exemple, pour obtenir de AB une image virtuelle située dans le plan focal objet du système. Cet oculaire qui ne permet pas d'observer directement l'image à l'infini d'un objet réel mais seulement celle d'un objet virtuel est dit négatif. Il est utilisé comme oculaire de microscope. C'est l'oculaire dit d'*Huygens :* il est constitué par deux lentilles plan-convexes, faces convexes en avant.

4° La puissance de l'oculaire est donnée, par définition, par l'expression

$$P = \frac{\alpha'}{AB} \cdot$$

La figure 3 donne $\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \dfrac{A_1B_1}{B_1O_2} = \dfrac{A_1B_1}{F_2O_2} = \dfrac{A_1B_1}{f_2}$.

$$P = \frac{A_1B_1}{AB} \times \frac{1}{f_2} .$$

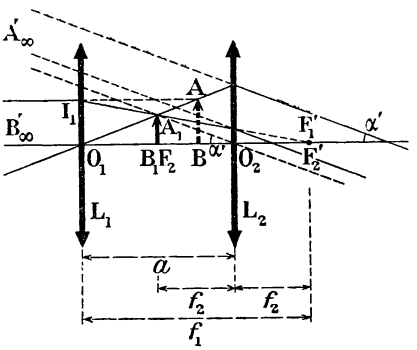


Fig. 3.

$\dfrac{A_1B_1}{AB}$ est le grandissement de la lentille L_1 pris en valeur absolue :

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1B_1}{O_1I_1} = \frac{B_1F'_1}{O_1F'_1} = \frac{2f_2}{f_1} .$$

$$P = \frac{2f_2}{f_1} \times \frac{1}{f_2} = \frac{2}{f_1} .$$

Numériquement : $f_1 = 4{,}5$ cm ou 0,045 m.

$$P = \frac{2}{0{,}045} = \frac{400}{9} .$$

P = 44,4 dioptries.

Remarque. — On aurait pu écrire dans l'expression de la puissance pour la vision à l'infini

$$P = \frac{A_1B_1}{AB} \times \frac{1}{f_2} ,$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1B_1}{O_1I_1} = \frac{B\,F'_1}{O_1F_1'} = \frac{f_1 - a + f_2}{f_1} ,$$

$$P = \frac{f_1 - a + f_2}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} - \frac{a}{f_1 f_2} + \frac{1}{f_2} .$$

Cette expression ne dépend pas de la position de l'œil. C'est la puissance intrinsèque du système.

CHAPITRE XI

Microscope.

39. — Microscope.
Puissance, grossissement, latitude de mise au point.

Un microscope est formé d'un objectif de 5 mm et d'un oculaire de 20 mm de distances focales, dont les axes optiques coïncident et dont les centres optiques sont distants de 20 cm. L'œil est placé au foyer image de l'oculaire.

1° Calculer la position de l'objet quand l'œil, qui est normal, n'accommode pas Quels sont alors la puissance et le grossissement de l'appareil ?

2° Calculer la position de l'objet quand l'œil accommode au maximum, sa distance minimale de vision distincte étant 25 cm. Quelle est, avec deux chiffres significatifs exacts, la latitude de mise au point ? Calculer dans ce cas la puissance et le grossissement du microscope.

Faire dans les deux cas des dessins corrects et soignés.

(Paris.)

1° Désignons par f_1 et f_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire de l'appareil et par L la distance des centres optiques de ces lentilles, ces distances étant prises en valeur absolue.

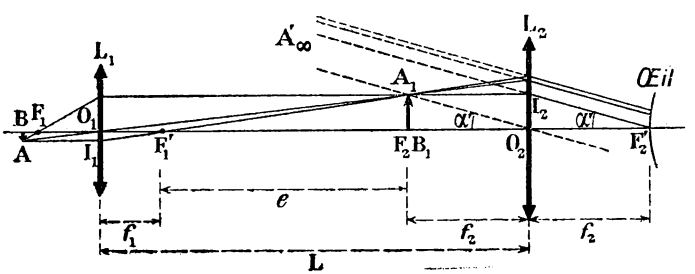


Fig. 1.

Position de l'objet.

L'œil normal n'accommodant pas, l'image définitive A'B' est virtuelle et à l'infini. L'image intermédiaire, A_1B_1, est réelle et dans le plan focal de l'oculaire (fig. 1), c'est-à-dire à la distance $L - f_2$ de

l'objectif. L'objet AB est situé à une distance, p_1, de l'objectif donnée par la formule de Descartes

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1'} = \frac{1}{f_1},$$

dans laquelle $p'_1 = +(L - f_2)$ (image réelle).

Nous en tirons

$$p_1 = \frac{p'_1 f_1}{p'_1 - f_1},$$

ou

$$p_1 = \frac{(L - f_2) f_1}{L - f_2 - f_1}.$$

Calcul de la puissance.

La puissance du microscope est, par définition, le rapport du diamètre apparent α' de l'image à la grandeur AB de l'objet :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}.$$

La puissance P est exprimée en dioptries si α' est exprimé en radians et AB en mètres.

Nous pouvons écrire cette expression sous la forme

$$P = \frac{\alpha'}{A_1B_1} \times \frac{A_1B_1}{AB}.$$

Le terme $\frac{\alpha'}{A_1B_1}$ représente par définition la puissance P_2 de l'oculaire. Le terme $\frac{A_1B_1}{AB}$ représente le grandissement linéaire γ_1 de l'objectif, pris en valeur absolue.

$$P = P_2 \times \gamma_1. \qquad (1)$$

La puissance du microscope est égale au produit de la puissance de l'oculaire par le grandissement linéaire de l'objectif, pris en valeur absolue.

Dans le cas particulier envisagé, l'œil est placé au foyer image de l'oculaire. P_2 représente la puissance intrinsèque de celui-ci :

$$P_2 = \frac{1}{f_2}.$$

Le grandissement linéaire $\frac{A_1B_1}{AB}$ s'obtient en considérant les triangles semblables $A_1B_1F'_1$ et $O_1I_1F'_1$ (fig. 1) :

$$\frac{A_1B_1}{O_1I_1} = \frac{F'_1B_1}{F'_1O_1}.$$

L'œil vise à l'infini : B_1 est confondu avec F_2 et l'on peut poser $F'_1B_1 = F'_1F_2 = e$. On donne à la distance e le nom d'*intervalle optique* du microscope.

La relation précédente s'écrit

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{e}{f_1}.$$

La puissance du microscope a donc pour expression

$$P = \frac{e}{f_1 f_2},$$

dans laquelle e a pour valeur $e = L - f_1 - f_2$.

Cette valeur particulière de la puissance, indépendante de la vue de l'observateur, porte le nom de *puissance intrinsèque* du microscope. Elle s'exprime en dioptries, si e, f_1 et f_2 sont mesurés en mètres. On la désigne par P_i.

Calcul du grossissement. — Le grossissement du microscope est, par définition, le rapport du diamètre apparent α' de l'image définitive au diamètre apparent α de l'objet vu à l'œil nu dans les meilleures conditions (objet à la distance minimale de vision distincte δ) :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Le diamètre apparent α de l'objet est, dans ces conditions,

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{\delta}.$$

D'où l'expression du grossissement

$$G = \frac{\alpha'}{\frac{AB}{\delta}} = \frac{\alpha'}{AB} \times \delta = P \times \delta.$$

La distance minimale de vision distincte, δ, donnée dans la question 2° du problème, est $\delta = 0{,}25$ m. Le grossissement calculé dans ce cas en prenant $P = P_i$ et $\delta = 0{,}25$ m n'est autre que le grossissement commercial du microscope :

$$G_c = P_i \times 0{,}25 = \frac{P_i}{4}.$$

Application numérique : $f_1 = 5$ mm ou 0,5 cm ou 0,005 m; $f_2 = 20$ mm ou 2 cm ou 0,020 m; $L = 20$ cm ou 0,200 m; $e = 0{,}200 - 0{,}005 - 0{,}020 = 0{,}175$ m; $\delta = 0{,}25$ m.

Position de l'objet :

$$p_1 = \frac{(20 - 2)\ 0{,}5}{20 - 2 - 0{,}5} = \frac{18}{35}.$$

$$p_1 = \mathbf{0{,}514\,28\ cm.}$$

Puissance de l'instrument :

$$P = \frac{0{,}175}{0{,}005 \times 0{,}020},$$

$$\mathbf{P = 1\,750\ dioptries.}$$

Cette valeur est aussi celle de la puissance intrinsèque P_i.

Grossissement de l'instrument :

$$G = 1\,750 \times 0{,}25.$$

$$\mathbf{G = 437{,}5.}$$

Cette valeur est aussi celle du grossissement commercial G_c.

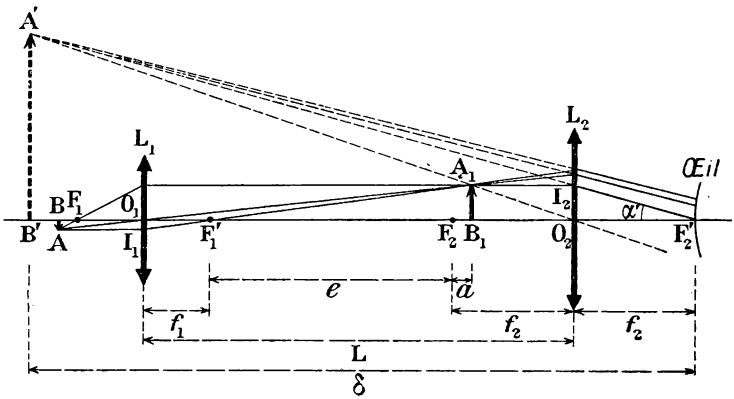


Fig. 2.

2° *Position de l'objet.* — L'œil normal accommodant au maximum, l'image définitive est virtuelle et située à la distance minimale de vision distincte δ (fig. 2). L'image intermédiaire, A_1B_1, n'est plus située dans le plan focal objet de l'oculaire. Elle s'est rapprochée de l'oculaire de la distance $F_2B_1 = a$. Cette distance a est la latitude de mise au point de l'oculaire pour un œil normal situé au foyer image. Elle est donnée par l'expression (problème 34)

$$a = \frac{f_2^2}{\delta}.$$

L'image A_1B_1 se trouve donc à une distance de l'objectif égale à $L - f_2 + a$, en valeur absolue.

L'objet AB est alors à une distance p_2 de celui-ci donnée par la formule de Descartes

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = \frac{1}{f_1},$$

dans laquelle $p'_2 = + (L - f_2 + a)$ (image réelle).

Nous en tirons

$$p_2 = \frac{p'_2 f_1}{p'_2 - f_1}$$

ou

$$p_2 = \frac{(L - f_2 + a) f_1}{L - f_2 + a - f_1}.$$

Latitude de mise au point. — La latitude de mise au point est le déplacement l que l'on peut donner au microscope par rapport à l'objet pour que l'image définitive reste dans le champ de vision distincte. Elle est égale à la différence des distances p_1 et p_2.

$$l = p_1 - p_2.$$

Application numérique : $f_1 = 0{,}5$ cm, $f_2 = 2$ cm, $\delta = 25$ cm.

$$a = \frac{2^2}{25} = 0{,}16 \text{ cm}.$$

Position de l'objet :

$$p_2 = \frac{(20 - 2 + 0{,}16)\ 0{,}5}{20 - 2 + 0{,}16 - 0{,}5},$$

$$p_2 = \mathbf{0{,}514\ 15\ cm.}$$

Latitude de mise au point :

$$l = 0{,}514\ 28 - 0{,}514\ 15 = 0{,}000\ 13 \text{ cm},$$

$$l = \mathbf{1{,}3\ \mu}.$$

Calcul de la puissance et du grossissement. — La puissance est donnée par la formule (1) dans laquelle $P_2 = \frac{1}{f_2}$ et

$$\gamma_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{F'_1B_1}{F'_1O_1} \quad \text{(fig. 2)}.$$

La distance F'_1B_1 est alors

$$F'B = e + a$$

et la puissance

$$P = \frac{e + a}{f_1 f_2}.$$

Le grossissement est

$$G = P \times \delta.$$

Application numérique : $e = 0{,}175$ m; $a = 0{,}16$ cm ou $0{,}001\,6$ m.

$$P = \frac{0{,}175 + 0{,}001\,6}{0{,}005 \times 0{,}020} = \frac{0{,}176\,6}{0{,}000\,1},$$

$$\mathbf{P = 1\,766 \text{ dioptries.}}$$

$$G = 1\,766 \times 0{,}25,$$

$$\mathbf{G = 441{,}5.}$$

Les valeurs trouvées pour P et G dans les deux cas étudiés sont différentes : puissance et grossissement dépendent des conditions d'observation pour un œil donné.

40. — Microscope. Mesure de la puissance au moyen de la chambre claire. Pouvoir séparateur.

Un observateur règle son microscope de façon que l'image se forme à la distance minimale de vision distincte de l'œil.

1° Montrer que, dans ce cas, le grossissement est égal au grandissement.

2° On place sur le porte-objet un micromètre gradué en centièmes de millimètre. Puis, sans changer la mise au point, on adapte au microscope une chambre claire, donnant, d'une règle graduée en millimètres, placée à côté de l'appareil, une image située à la distance minimale de vision distincte de l'œil. Sachant que 4 divisions du micromètre recouvrent 5 divisions de la règle, trouver le grossissement. Quelle distance minimale de vision distincte doit avoir l'œil de l'observateur pour que cette valeur soit celle du grossissement commercial? En supposant cette condition remplie, trouver la puissance du microscope.

3° On remplace le micromètre par une préparation dans laquelle un petit objet correspond à une division de la règle. Quelle est sa grandeur ?

4° Sachant que le pouvoir séparateur de l'œil est d'environ 1 minute d'angle, quelle est la grandeur du plus petit objet que l'observateur puisse voir à l'aide du microscope ?

(Caen.

1° Le grossissement du microscope est, par définition, le rapport du diamètre apparent, α', de l'image au diamètre apparent, α, de l'objet, vu au punctum proximum :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

α' est le rapport de la grandeur de l'image définitive, A'B', à la distance d'observation d :

$$\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{A'B'}{d} .$$

α est le rapport de la grandeur de l'objet AB à la distance minimale de vision distincte δ :

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{\delta} .$$

Le grossissement a donc pour expression

$$G = \frac{\dfrac{A'B'}{d}}{\dfrac{AB}{\delta}} = \frac{A'B'}{AB} \times \frac{\delta}{d} .$$

Le rapport $\dfrac{A'B'}{AB}$ représente, par définition, le grandissement linéaire de l'instrument.

Lorsque l'observateur utilise le microscope en accommodant au punctum proximum, la distance d'observation est égale à la distance minimale de vision distincte : $d = \delta$.

Dans ce cas le grossissement est égal au grandissement linéaire

$$G = \frac{A'B'}{AB} .$$

2° La chambre claire (voir figure) permet la superposition de deux images à la même distance d'observation : celle de la préparation micrométrique vue à travers le microscope et celle de la règle graduée, disposée latéralement, vue en vraie grandeur. Ce dispositif permet donc la mesure du grandissement du microscope et, par suite, du grossissement si la distance d'observation est égale à la distance minimale de vision distincte.

Dans l'expérience réalisée, l'objet AB a pour grandeur

$$AB = \frac{n}{100} \text{ mm};$$

son image, A'B', recouvre n' mm à la distance δ :

$$A'B' = n' \text{ mm}.$$

Nous avons donc

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{n'}{\dfrac{n}{100}} = 100 \times \frac{n'}{n}$$

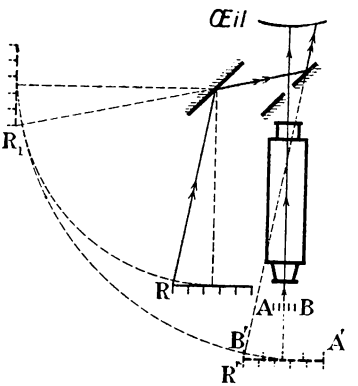
et, par suite,

$$G = 100 \times \frac{n'}{n} .$$

Si $\delta = 0{,}25$ m, G représente par définition le grossissement commercial de l'appareil, G_c.

D'une manière générale le grossissement s'exprime en fonction de la puissance et de la distance minimale de vision distincte δ par la relation (problème 39)

$$G = P \times \delta.$$



Si la condition $\delta = 0{,}25$ m est remplie, le grossissement mesuré G est égal au grossissement commercial G_c et nous avons

$$G_c = P \times 0{,}25.$$

Le grossissement commercial étant lié à la puissance intrinsèque par la relation (problème 39)

$$G_c = P_i \times 0{,}25,$$

la puissance P qui correspond au grossissement mesuré G est égale à la puissance intrinsèque :

$$P = P_i = \frac{G_c}{0{,}25} = 4 \times 100 \times \frac{n'}{n} \cdot \qquad (1)$$

Numériquement :

$$n = 4, \quad n' = 5, \quad G = 100 \times \frac{5}{4},$$

$$\mathbf{G = 125.}$$

Si $\delta = 0{,}25$ m et si l'œil est placé au foyer image de l'oculaire,

$$G = G_c = 125 \quad \text{et} \quad P = P_i = 4 \times 125,$$

$$\mathbf{P = 500 \text{ dioptries.}}$$

3° La grandeur d'un objet AB mesurant n centièmes de mm et dont l'image a pour longueur n' mm est donnée par la formule (1). Nous en tirons

$$n = \frac{4 \times 100 \times n'}{P} \cdot$$

Numériquement : $n' = 1$, $P = 500$ dioptries.

$$n = \frac{4 \times 100 \times 1}{500} = 0{,}8 \text{ centième de mm.}$$

$$\mathbf{AB = 8\ \mu.}$$

4° Nous admettons qu'un objet AB peut être vu par l'observateur si ses extrémités A et B fournissent des images distinctes.

La grandeur du plus petit objet que l'observateur puisse voir à l'aide du microscope, c'est-à-dire dont il peut voir les extrémités séparées, est le *pouvoir séparateur* de l'appareil.

Pour les microscopes de faible grossissement, comme celui dont il est question, le pouvoir séparateur dépend uniquement de l'acuité visuelle, ou pouvoir séparateur de l'œil.

Celui-ci étant 1′ ou $\frac{\pi}{180 \times 60}$ radian, l'œil ne peut distinguer deux points voisins, A et B, d'une préparation que si le diamètre apparent de l'image A′B′ est supérieur ou égal à 1′.

La relation $P = \frac{\alpha'}{AB}$, définissant la puissance du microscope, nous donne la grandeur AB de l'objet dont l'image A′B′ a pour diamètre apparent $\alpha' = 1'$, ou $\frac{\pi}{180 \times 60}$ radian :

$$AB = \frac{\alpha'}{P} = \frac{\pi}{180 \times 60} \times \frac{1}{P}.$$

Numériquement : $P = 500$ dioptries.

$$AB = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 500} = \frac{10\,\pi}{54} \times 10^{-6}\ \text{m};$$

$$\mathbf{AB = 0{,}58\ \mu.}$$

41. — Microscope. Grossissement. Calcul du pas de la vis micrométrique. Mesure de l'indice d'une lame de verre.

Un microscope est muni d'un objectif et d'un oculaire dont les puissances respectives sont 100 et 20 dioptries. Il est utilisé *sans accommodation* par un observateur à vue normale.

1° La distance de l'oculaire à l'objectif étant 16 cm, calculer :

a) **le grossissement *commercial* de ce microscope ;**

b) **l'angle sous lequel on voit à travers cet instrument un globule rouge (hématie du sang de grenouille) dont le diamètre est 22 microns ;**

c) **le diamètre d'un objet qui serait vu à l'œil nu, sous ce même angle, à la distance de 25 cm.**

2° A l'aide d'un tube à tirage, on éloigne l'oculaire de l'objectif de manière à augmenter de 10 cm la distance oculaire-objectif :

a) **Quelle est la nouvelle valeur du grossissement commercial ?**

b) **De combien et dans quel sens faut-il déplacer le système optique par rapport à l'objet pour rétablir la mise au point ?**

c) Ce résultat étant obtenu en tournant de 2,5 tours la vis micrométrique, quel est le pas de cette vis ?

3° On recouvre l'objet d'une lamelle de verre de 0,25 mm d'épaisseur, à faces parallèles. On constate que, pour obtenir de nouveau une image nette, il faut tourner la vis micrométrique de $\frac{45}{100}$ tour. Quel est l'indice de réfraction du verre de la lamelle ?

N.-B. — Le grossissement commercial est défini en prenant pour la distance minimale de vision distincte la valeur 25 cm.

1 micron = 0,001 mm.

Un tour complet de la vis micrométrique déplace l'ensemble oculaire-objectif d'une longueur égale à son pas.

(Grenoble.

1° Désignons par f_1 et f_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire de l'appareil et par L la distance des centres optiques de ces lentilles, ces distances étant prises en valeur absolue.

a) Le grossissement commercial, G_c, du microscope est égal au produit de sa puissance intrinsèque, P_i, par la distance minimale de vision distincte $\delta = 0{,}25$ m (problème 39) :

$$G_c = P_i \times 0{,}25 = \frac{P_i}{4} .$$

L'observateur à vue normale vise sans accommoder : il vise donc à l'infini et la puissance de l'appareil est sa puissance intrinsèque donnée par l'expression (problème 39)

$$P_i = \frac{e}{f_1 f_2} .$$

L'intervalle optique $e = F'_1F_2$ est égal à $L - f_1 - f_2$,

d'où
$$G_c = \frac{L - f_1 - f_2}{4 f_1 f_2} . \qquad (1)$$

Dans cette formule, toutes les longueurs doivent être exprimées en mètres.

Application numérique :

Puissance de l'objectif : 100 dioptries; $f_1 = \frac{1}{100}$ m ou 0,01 m.

Puissance de l'oculaire : 20 dioptries; $f_2 = \frac{1}{20}$ m ou 0,05 m.

L = 16 cm ou 0,16 m.

$$G_c = \frac{0{,}16 - 0{,}01 - 0{,}05}{4 \times 0{,}01 \times 0{,}05} , \qquad \mathbf{G_c = 50.}$$

b) Le grossissement du microscope est, par définition, le rapport du diamètre apparent, α', de l'image A'B' au diamètre apparent, α, de l'objet AB, vu au punctum proximum :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} .$$

L'angle sous lequel l'observateur voit l'hématie à travers l'instrument est l'angle α' :

$$\alpha' = G \times \alpha.$$

L'angle α a pour mesure

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{\delta},$$

d'où

$$\alpha' = G \times \frac{AB}{\delta} .$$

Application numérique :

$\delta = 0{,}25$ m, $AB = 22\ \mu$ ou 22×10^{-6} m, $G = G_c = 50$,

$$\alpha' = 50 \times \frac{22 \times 10^{-6}}{0{,}25},$$

$$\alpha' = 44 \times 10^{-4} \text{ radian} \quad \text{ou} \quad \alpha' = \mathbf{15'}.$$

c) Le diamètre D d'un objet vu à l'œil nu à la distance $\delta = 0{,}25$ m sous l'angle α' est tel que

$$\alpha' = \frac{D}{\delta} .$$

Nous en tirons

$$D = \alpha' \delta.$$

Numériquement : $\alpha' = 44 \times 10^{-4}$ radian, $\delta = 0{,}25$ m,

$$D = 44 \times 10^{-4} \times 0{,}25 = 11 \times 10^{-4} \text{ m};$$

$$\mathbf{D = 0{,}11\ cm.}$$

2° *a*) L'observation se faisant dans les mêmes conditions que dans la question 1°, la formule (1) reste valable en remplaçant L par la nouvelle valeur L' :

$$G_c = \frac{L' - f_1 - f_2}{4 f_1 f_2} .$$

Numériquement : $L' = L + 10 = 16 + 10 = 26$ cm ou 0,26 m, $f_1 = 0{,}01$ m, $f_2 = 0{,}05$ m,

$$G_c = \frac{0{,}26 - 0{,}01 - 0{,}05}{4 \times 0{,}01 \times 0{,}05},$$

$$\mathbf{G_c = 100.}$$

b) L'œil normal n'accommodant pas, l'image définitive doit être virtuelle dans les deux cas et infiniment éloignée. L'image intermédiaire, A_1B_1, doit se former dans le plan focal objet de l'oculaire donc à la distance $L - f_2$ de l'objectif dans le premier cas et à la distance $L' - f_2$ de l'objectif dans le second.

A ces deux positions de A_1B_1 correspondent deux positions de l'objet AB données par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_1},$$

d'où

$$p = \frac{p' f_1}{p' - f_1}.$$

Dans le premier cas, p' a la valeur $p'_1 = + (L - f_2)$ (image réelle).

La distance p_1 de l'objet à l'objectif est

$$p_1 = \frac{(L - f_2) f_1}{L - f_2 - f_1}.$$

Dans le second cas, p' a la valeur $p'_2 = + (L' - f_2)$.
La distance p_2 de l'objet à l'objectif est

$$p_2 = \frac{(L' - f_2) f_1}{L' - f_2 - f_1}.$$

L' étant plus grand que L, p_2 est plus petit que p_1 : il faut rapprocher l'objet de l'objectif de la distance $p_1 - p_2$.

Application numérique :

$$p_1 = \frac{(0{,}16 - 0{,}05)\ 0{,}01}{0{,}16 - 0{,}05 - 0{,}01} = \frac{0{,}11}{10} \text{ m ou } 11 \text{ mm},$$

$$p_2 = \frac{(0{,}26 - 0{,}05)\ 0{,}01}{0{,}26 - 0{,}05 - 0{,}01} = \frac{0{,}21}{20} \text{ m ou } 10{,}5 \text{ mm}.$$

$$p_1 - p_2 = 11 - 10{,}5 ;$$

$$p_1 - p_2 = \mathbf{0{,}5\ mm}.$$

c) Si nous désignons par h le pas de vis micrométrique et par n le nombre de tours de cette vis qui permet de conserver la mise au point, nous pouvons écrire

$$n \times h = p_1 - p_2.$$

Nous en tirons

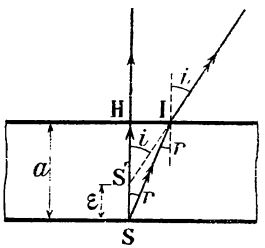
$$h = \frac{p_1 - p_2}{n}.$$

Numériquement : $p_1 - p_2 = 0{,}5$ mm, $n = 2{,}5$,

$$h = \mathbf{0{,}2\ mm.}$$

3° La réfraction à travers la lame à faces parallèles rapproche l'objet de l'objectif d'une longueur ε. Pour conserver la mise au point à l'infini il faut donc éloigner le microscope de la préparation de la longueur ε.

La figure représentant la marche des rayons à travers la lame à faces parallèles permet d'écrire



$$\operatorname{tg} i = \frac{IH}{S'H} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} r = \frac{IH}{SH}\cdot$$

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} = \frac{SH}{S'H} = \frac{a}{a-\varepsilon}\cdot$$

Les angles i et r étant petits,

$$\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} r} \approx \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

L'indice n a donc pour expression

$$n = \frac{a}{a-\varepsilon}\cdot$$

Numériquement : $a = 0{,}25$ mm, $\varepsilon = \dfrac{0{,}2 \times 45}{100} = 0{,}09$ mm,

$$n = \frac{0{,}25}{0{,}25 - 0{,}09} = \frac{0{,}25}{0{,}16},$$

$$n = \mathbf{1{,}56.}$$

42. — Microscope. Mesure de la puissance et du grossissement au moyen de l'oculaire micrométrique.

1° Dans le plan focal de l'oculaire d'un microscope est disposé un micromètre au $\frac{1}{10}$ mm. Un observateur ayant une vue normale examine à travers l'appareil l'image à l'infini d'un micromètre au $\frac{1}{100}$ mm. Il constate que l'image de 3 divisions du micromètre au $\frac{1}{10}$ mm coïncide exactement avec l'image d'une division du micromètre au $\frac{1}{100}$ mm. Sachant que la puissance de l'oculaire est 50 dioptries, déterminer la puissance du microscope.

2° Calculer le grossissement de l'appareil pour l'observateur dont la distance minimale de vision distincte est 20 cm.

3° Calculer la distance focale de l'objectif, sachant que la longueur totale de l'appareil (distance du centre optique de l'objectif au centre optique de l'oculaire) est 20 cm.

Madagascar.)

1° La puissance du microscope est égale au produit de la puissance de l'oculaire par le grandissement linéaire de l'objectif pris en valeur absolue (problème 39) :

$$P = P_2 \times \gamma_1.$$

La puissance P_2 de l'oculaire est connue.

Le grandissement linéaire de l'objectif est égal au rapport de la grandeur de l'image intermédiaire, A_1B_1, à la grandeur de l'objet AB :

$$\gamma_1 = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

$\frac{A_1B_1}{AB}$ peut être mesuré au moyen d'un premier micromètre, servant d'objet et d'un deuxième micromètre associé à un oculaire, constituant un oculaire micrométrique.

Ce deuxième micromètre étant placé dans le plan focal objet de l'oculaire, l'œil voit simultanément à l'infini les images du micromètre objet et du micromètre oculaire.

Si n divisions du micromètre objet, gradué en centièmes de millimètre, recouvrent n_1 divisions du micromètre oculaire gradué en dixièmes de millimètre, nous avons

$$AB = \frac{n}{100} \text{ mm} \quad \text{et} \quad A_1B_1 = \frac{n_1}{10} \text{ mm}.$$

Le grandissement linéaire de l'objectif est

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{100}{10} \times \frac{n_1}{n} = 10\,\frac{n_1}{n}.$$

La puissance du microscope est donc

$$P = P_2 \times 10\,\frac{n_1}{n}.$$

Numériquement : $n = 1$ centième de mm, $n_1 = 3$ dixièmes de mm, $P_2 = 50$ dioptries.

$$P = 50 \times 10 \times \frac{3}{1},$$

$$P = \mathbf{1\,500\ dioptries.}$$

2° Le grossissement du microscope est égal au produit de sa puissance, P, par la distance minimale de vision distincte δ (problème 39) :

$$G = P \times \delta.$$

La puissance P doit être évaluée en dioptries et δ en mètres.

Numériquement : $P = 1\,500$ dioptries, $\delta = 0{,}20$ m.

$$G = 1\,500 \times 0{,}20,$$

$$\mathbf{G = 300.}$$

3° Désignons par f_1 et f_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire et par L la distance des centres optiques de ces deux lentilles.

Nous pouvons exprimer le grandissement linéaire en fonction de ces trois grandeurs (fig. 1, problème 39).

Les triangles semblables $A_1B_1F'_1$ et $I_1O_1F_1'$ donnent

$$\frac{A_1B_1}{O_1I_1} = \frac{F'_1B_1}{F'_1O_1}.$$

L'œil vise à l'infini : B_1 est confondu avec F_2 et nous avons

$$F_1'B_1 = L - f_1 - f_2.$$

La relation précédente s'écrit

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{L - f_1 - f_2}{f_1}$$

ou, en remplaçant $\frac{A_1B_1}{AB}$ par sa valeur,

$$10\frac{n_1}{n} = \frac{L - f_1 - f_2}{f_1}.$$

Nous en tirons f_1 :

$$f_1 = \frac{L - f_2}{10\frac{n_1}{n} + 1}.$$

Numériquement :

$$L = 20 \text{ cm}, \quad f_2 = \frac{1}{50} \text{ m} \quad \text{ou } 2 \text{ cm}, \quad 10\frac{n_1}{n} = 10 \times \frac{3}{1} = 30.$$

$$f_1 = \frac{20 - 2}{30 + 1} = \frac{18}{31} = 0{,}580 \text{ cm},$$

$$\mathbf{f_1 = 5{,}80 \text{ mm}.}$$

43. — Microscope. Latitude de mise au point, puissance et grossissement pour un œil myope. Microphotographie.

A) Un œil myope a pour limites de vision distincte 50 cm (*punctum remotum*) et 10 cm (*punctum proximum*). Cet œil est placé contre l'oculaire d'un microscope dont la distance focale est 2 cm. L'objectif de ce microscope

a une distance focale de 5 mm et sa distance à l'oculaire vaut 15 cm. Où faut-il placer un objet par rapport à l'objectif, à $\frac{1}{10}$ micron près, pour que l'image définitive se forme :

a) au *punctum remotum*,

b) au *punctum proximum*

de cet œil myope ? En déduire la latitude de mise au point du microscope. Calculer, dans les deux cas, la puissance et le grossissement de l'appareil.

B) On veut utiliser le microscope précédent pour la microphotographie d'un objet situé à 5,2 mm de l'objectif et l'on veut obtenir un grandissement linéaire de l'appareil égal à 100. Calculer les distances par rapport à l'objectif qu'il faudra donner à l'oculaire et à la plaque photographique. On dessinera soigneusement (dans ce cas B) la marche de la lumière.

N. B. — Les questions A et B sont indépendantes et seront cotées 8 et 2.

(*Istanbul.*)

A) Désignons par f_1 et f_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire de l'instrument et par L la distance des centres optiques de ces lentilles, ces distances étant prises en valeur absolue.

Position de l'objet.

a) *Image au punctum remotum.* — L'image définitive, A'B', de l'objet AB est virtuelle et se forme à la distance Δ de l'œil, et par suite à cette même distance de l'oculaire, l'œil étant placé contre celui-ci.

L'image A_1B_1, qui joue le rôle d'objet pour l'oculaire, se trouve à la distance d_1 de celui-ci donnée par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{-\Delta} = \frac{1}{f_2},$$

(objet réel, image virtuelle, lentille convergente).

Nous en tirons

$$d_1 = \frac{\Delta f_2}{\Delta + f_2} \cdot \qquad (1)$$

L'image A_1B_1 se trouve à une distance de l'objectif égale à $L - d_1$. L'objet AB est alors à la distance p_1 de l'objectif donnée par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{L - d_1} = \frac{1}{f_1} \cdot$$

Nous en tirons

$$p_1 = \frac{(L - d_1) f_1}{L - d_1 - f_1} \cdot \qquad (2)$$

Les formules (1) et (2) permettent de calculer la distance p_1.

Numériquement :

$\Delta = 50$ cm, $L = 15$ cm, $f_2 = 2$ cm, $f_1 = 5$ mm ou 0,5 cm.

$$d_1 = \frac{50 \times 2}{50 + 2} = \frac{25}{13} \text{ cm},$$

$$p_1 = \frac{\left(15 - \frac{25}{13}\right) \times 0{,}5}{15 - \frac{25}{13} - 0{,}5} = \frac{170}{327} = 0{,}519\,877 \text{ cm}.$$

Pour avoir la précision d'un dixième de micron, la valeur de p_1 devra être donnée avec cinq décimales.

$$p_1 = \mathbf{0{,}519\,88 \text{ cm}}.$$

b) *Image au punctum proximum.* — Le même raisonnement est applicable; mais l'image définitive, A'B', se trouve cette fois à la distance minimale de vision distincte, δ, de l'oculaire.

La distance d_2 de l'image A_1B_1 à l'oculaire est

$$d_2 = \frac{\delta f_2}{\delta + f_2}. \tag{3}$$

Cette image se trouve à la distance $L - d_2$ de l'objectif.

La distance p_2 de l'objet à l'objectif est

$$p_2 = \frac{(L - d_2) f_1}{L - d_2 - f_1}. \tag{4}$$

Les formules (3) et (4) nous permettent de calculer la distance p_2.

Numériquement : $\delta = 10$ cm, $L = 15$ cm, $f_2 = 2$ cm, $f_1 = 0{,}5$ cm.

$$d_2 = \frac{10 \times 2}{10 + 2} = \frac{5}{3} \text{ cm}.$$

$$p_2 = \frac{\left(15 - \frac{5}{3}\right) \times 0{,}5}{15 - \frac{5}{3} - 0{,}5} = \frac{40}{77} = 0{,}519\,480 \text{ cm}.$$

$$p_2 = \mathbf{0{,}519\,48 \text{ cm}}.$$

Latitude de mise au point. — La latitude de mise au point est le déplacement l que l'on peut donner au microscope par rapport à l'objet pour que l'image définitive reste dans le champ de vision distincte. Elle est égale à la différence des distances p_1 et p_2 :

$$l = p_1 - p_2.$$

Numériquement : $l = 0{,}519\,88 - 0{,}519\,48 = 0{,}000\,40$ cm

$$l = 4\ \mu.$$

Puissance et grossissement du microscope. — La puissance du microscope est donnée par l'expression

$$P = \frac{\alpha'}{AB}.$$

Si l'image A'B' est à la distance D, elle est vue sous l'angle

$$\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{A'B'}{D}$$

et la puissance du microscope a pour expression

$$P = \frac{A'B'}{AB} \times \frac{1}{D}.$$

Le rapport $\frac{A'B'}{AB}$ représente le grandissement γ du microscope pris en valeur absolue.

Nous pouvons écrire

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB} \times \frac{A'B'}{A_1B_1}.$$

$\frac{A_1B_1}{AB}$ et $\frac{A'B'}{A_1B_1}$ sont respectivement les grandissements γ_1 de l'objectif et γ_2 de l'oculaire pris en valeur absolue.

La puissance du microscope est alors donnée par la formule générale

$$P = \gamma_1 \times \gamma_2 \times \frac{1}{D}.$$

Le grossissement s'exprime en fonction de la puissance par la relation

$$G = P \times \delta.$$

a) *Vision au punctum remotum.* $D = \Delta$.

$$\gamma_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{L - d_1}{p_1}, \qquad \gamma_2 = \frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{\Delta}{d_1}.$$

$$P_1 = \frac{L - d_1}{p_1} \times \frac{\Delta}{d_1} \times \frac{1}{\Delta} = \frac{L - d_1}{d_1 \times p_1}.$$

$$G_1 = P_1 \times \delta.$$

Numériquement : $L_1 = 15$ cm ou 0,15 m, $d_1 = \frac{25}{13}$ cm ou $\frac{25}{1\,300}$ m,

$p_1 = \frac{170}{327}$ cm ou $\frac{170}{32\,700}$ m, $\quad \delta = 10$ cm ou 0,10 m.

$$P_1 = \frac{0{,}15 - \frac{25}{1\,300}}{\frac{25}{1\,300} \times \frac{170}{32\,700}} = \frac{32\,700}{25},$$

$$\mathbf{P_1 = 1\,308 \text{ dioptries.}}$$

$$G_1 = 1\,308 \times 0{,}10,$$

$$\mathbf{G_1 = 130{,}8.}$$

b) *Vision au punctum proximum.* $D = \delta$.

$$\gamma_1 = \frac{L - d_2}{p_2}, \qquad \gamma_2 = \frac{\delta}{d_2}.$$

$$P_2 = \frac{L - d_2}{d_2 \times p_2}.$$

$$G_2 = P_2 \times \delta.$$

Numériquement : $L_1 = 15$ cm ou 0,15 m, $d_2 = \frac{5}{3}$ cm ou $\frac{5}{300}$ m,

$p_2 = \frac{40}{77}$ cm ou $\frac{40}{7\,700}$ m, $\quad \delta = 0{,}10$ m.

$$P_2 = \frac{0{,}15 - \frac{5}{300}}{\frac{5}{300} \quad \frac{40}{7\,700}} \frac{7\,700}{5},$$

$$\mathbf{P_2 = 1\,540 \text{ dioptries.}}$$

$$G_2 = 1540 \times 0{,}10,$$

$$\mathbf{G_2 = 154.}$$

B) *Microphotographie.* — Pour obtenir une image réelle à la distance D′ de l'objectif, l'image intermédiaire A_1B_1 devra être réelle et située à une distance de l'oculaire supérieure à la distance focale f_2. Il faudra donc augmenter la distance objectif-oculaire. Nous désignerons par x cette nouvelle distance.

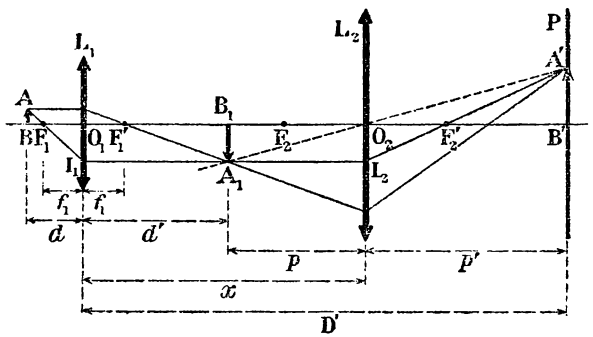
Le grandissement γ du microscope modifié, pris en valeur absolue, nous est imposé ainsi que la distance d de l'objet à l'objectif.

Exprimons γ : $\qquad \gamma = \frac{A'B'}{A_1B_1} \times \frac{A_1B_1}{AB}.$

Les triangles semblables $A'B'F_2'$ et $I_2O_2F'_2$ donnent

$$\frac{A'B'}{I_2O_2} = \frac{F_2'B'}{F_2'O_2},$$

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{D' - x - f_2}{f_2}.$$



De même les triangles semblables $I_1O_1F_1$ et ABF_1, donnent

$$\frac{I_1O_1}{AB} = \frac{F_1O_1}{F_1B},$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{f_1}{d - f_1}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression de γ :

$$\gamma = \frac{D' - x - f_2}{f_2} \times \frac{f_1}{d - f_1} = \frac{(D' - x) - f_2}{d - f_1} \times \frac{f_1}{f_2}. \qquad (5)$$

D'autre part les formules de Descartes permettent d'écrire pour l'objectif,

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f_1},$$

ou

$$d' = \frac{df_1}{d - f_1}; \qquad (6)$$

pour l'oculaire,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x - d'} + \frac{1}{D' - x} = \frac{1}{f_2},$$

ou encore

$$x - d' = \frac{(D' - x) f_2}{(D' - x) - f_2}. \qquad (7)$$

Les équations (5), (6) et (7) constituent un système à trois inconnues x, D′ et d'. Ce système se ramène à un système à deux inconnues en éliminant d' entre (6) et (7).

Par addition membre à membre nous avons

$$x = \frac{df_1}{d - f_1} + \frac{(D' - x) f_2}{(D' - x) - f_2}. \qquad (8)$$

La résolution du nouveau système (5) et (8) est simple : on prend dans (5) la valeur de $(D' - x)$ et on la porte dans (8).

Application numérique : $\gamma = 100$; $f_2 = 2$ cm; $f_1 = 0{,}5$ cm; $d = 0{,}52$ cm.

L'équation (5) donne

$$D' - x = \gamma (d - f_1) \frac{f_2}{f_1} + f_2 = 100 (0{,}52 - 0{,}5) \frac{2}{0{,}5} + 2,$$

$$D' - x = 10 \text{ cm}.$$

L'équation (8) donne

$$x = \frac{0{,}52 \times 0{,}5}{0{,}52 - 0{,}5} + \frac{10 \times 2}{10 - 2},$$

$$x = \mathbf{15{,}5\ cm}.$$

$$\mathbf{D' = 25{,}5\ cm}.$$

CHAPITRE XII

Lunette astronomique.

44. — Lunette astronomique. Grossissement. Emploi du micromètre oculaire.

Une lunette astronomique est formée de deux lentilles minces dont les distances focales sont 50 cm et 2 cm. Dans le plan focal objet de l'oculaire on a placé un micromètre, c'est-à-dire une plaque de verre d'épaisseur négligeable sur laquelle on a tracé des traits parallèles très fins et équidistants. La distance de deux traits consécutifs est 0,1 mm.

1° Représenter cette lunette pour la vision à l'infini d'un objet très éloigné. Quel est son grossissement ? Quelle est la distance des deux lentilles ?

2° La lunette est utilisée pour observer une tour très éloignée dont la hauteur est 24 mètres. On suppose que l'axe de la lunette passe par le pied de la tour et que l'œil vise à l'infini. On voit alors en même temps l'image de la tour et l'image du micromètre, dont les traits sont horizontaux. L'image de la tour couvre 12 divisions de celle du micromètre. Quel est, en degrés et minutes, le diamètre apparent de l'image de la tour? Quelle est la distance de la tour à la lunette? Avec quelle approximation cette distance est-elle connue, si l'on admet une erreur maximale d'une demi-division du micromètre dans l'appréciation de la hauteur de l'image ?

3° Représenter la marche de deux rayons partis du sommet de la tour jusqu'à leur rencontre avec la rétine. Justifier cette représentation et calculer la hauteur de l'image formée sur la rétine. L'œil sera supposé réduit à une lentille convergente mince de 15 mm de distance focale et à une rétine plane.

(Égypte.)

1° Désignons par f_1 et f_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire et par L la distance de ces deux lentilles, ces distances étant prises en valeur absolue.

L'objet AB est très éloigné : l'image intermédiaire A_1B_1 se forme sensiblement dans le plan focal image de l'objectif.

L'œil vise à l'infini : l'image A_1B_1 est située dans le plan focal objet de l'oculaire, qui se trouve ainsi confondu avec le plan focal image de l'objectif.

Un faisceau de lumière parallèle issu du point A de l'objet donne naissance à un faisceau émergent parallèle : la lunette est dite *afocale* (fig. 1).

Le grossissement de l'instrument est, par définition, le rapport du

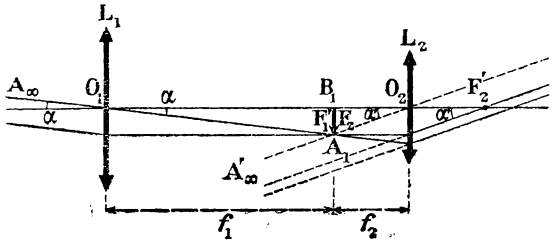


Fig. 1.

diamètre apparent, α', de l'image au diamètre apparent, α, de l'objet vu à l'œil nu :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Nous avons, d'après la figure 1,

$$\alpha' \approx \operatorname{tg} \alpha' = \frac{A_1B_1}{f_2}, \quad \approx \alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1B_1}{f_1}$$

et

$$G = \frac{A_1B_1}{f_2} : \frac{A_1B_1}{f_1} = \frac{f_1}{f_2}.$$

La distance des deux verres ou longueur de la lunette est, dans ce cas,

$$L = f_1 + f_2.$$

Numériquement : $f_1 = 50$ cm, $f_2 = 2$ cm.

$$G = \frac{50}{2},$$

$$\mathbf{G = 25.}$$

$$L = 50 + 2,$$

$$\mathbf{L = 52\ cm.}$$

2° Le micromètre étant situé dans le plan focal objet de l'oculaire se superpose à l'image intermédiaire, A_1B_1, fournie par l'objectif. L'œil, qui est placé derrière l'oculaire jouant le rôle de loupe, voit donc simultanément l'image A_1B_1 et le micromètre.

Calcul du diamètre apparent de l'image. — L'image A_1B_1 de la tour recouvre n divisions du micromètre dont chacune d'elles vaut e cm. Elle a donc pour grandeur

$$A_1B_1 = n \times e \text{ cm}.$$

Le diamètre apparent de l'image de la tour est

$$\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{A_1B_1}{f_2} = \frac{n\,e}{f_2} \text{ radians,}$$

ou

$$\alpha' = \frac{180 \times 60}{\pi} \times \frac{n\,e}{f_2} \text{ minutes.}$$

Nous divisons ce nombre par 60 : la partie entière donne le nombre de degrés, le reste le nombre de minutes.

Numériquement : $n = 12$, $e = 0{,}1$ mm ou $0{,}01$ cm, $f = 2$ cm.

$$\alpha' = \frac{12 \times 0{,}01}{2} = 0{,}06 \text{ radian;}$$

$$\alpha' = \frac{180 \times 60}{\pi} \times 0{,}06 = 206';$$

en degrés,

$$\alpha' = \frac{206}{60},$$

d'où

$$\alpha' = 3^\circ\,26'.$$

Distance D *de la tour à la lunette.* — La tour, de hauteur h, est vue sous le diamètre apparent α tel que

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{D}.$$

Nous en tirons

$$D = \frac{h}{\alpha}.$$

Mais

$$\alpha = \frac{A_1B_1}{f_1} = \frac{ne}{f_1}.$$

D'où

$$D = \frac{hf_1}{ne}. \qquad (1)$$

Numériquement :

$h = 24$ m ou $2\,400$ cm, $f_1 = 50$ cm, $e = 0{,}01$ cm, $n = 12$.

$$D = \frac{2\,400 \times 50}{12 \times 0{,}01} = 10^6 \text{ cm.}$$

$$\mathbf{D = 10\,km.}$$

Calcul de l'erreur commise sur D. — Si nous supposons que seul le nombre n de divisions du micromètre est entaché d'erreur, le théorème des erreurs relatives maximales appliqué à la relation (1) donne

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta n}{n}.$$

Nous en tirons

$$\Delta D = D \times \frac{\Delta n}{n}.$$

Numériquement : $D = 10$ km, $\Delta n = 0{,}5$, $n = 12$.

$$\Delta D = 10 \times \frac{0{,}5}{12} = 0{,}416 \text{ km},$$

$$\mathbf{\Delta D = 416 \text{ m}.}$$

3° Soit φ la distance focale de l'œil réduit (fig. 2). Le faisceau émergent correspondant au point A′ à l'infini est un faisceau paral-

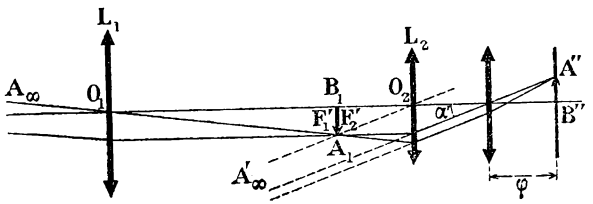


Fig. 2.

lèle à l'axe secondaire O_2A_1. L'œil fait converger ce faisceau au foyer secondaire correspondant à cet axe, c'est-à-dire au point A″ du plan focal image de l'œil, qui coïncide avec la rétine.

L'image rétinienne, A″B″, a pour grandeur

$$A''B'' = \varphi \times \alpha'.$$

Numériquement : $\varphi = 1{,}5$ cm, $\alpha' = 0{,}06$ radian.

$$A''B'' = 1{,}5 \times 0{,}06 = 0{,}090 \text{ cm},$$

$$\mathbf{A''B'' = 0{,}9 \text{ mm}.}$$

45. — Lunette astronomique. Mesure du grossissement par le procédé de la mire. Etude des images du Soleil.

1° Un observateur dont les deux yeux sont identiques dirige une lunette astronomique vers une mire très éloignée. D'un œil placé au foyer image de l'oculaire il vise à l'infini dans la lunette ; de l'autre il regarde directement la mire. L'intervalle de deux divisions de la mire vues dans l'instrument couvre *n* intervalles vus à l'œil nu. La distance des deux verres de l'instrument étant D, on demande les convergences de l'objectif et de l'oculaire.

2° L'observateur examine dans la lunette le déplacement apparent du Soleil. Indiquer si le déplacement de l'image du Soleil s'effectue vers sa gauche ou vers

sa droite. Interpréter ce résultat en traçant la marche des rayons issus d'un bord du Soleil pour deux positions correspondant à un petit déplacement angulaire de cet astre.

3° On dirige l'axe optique de la lunette vers le centre du Soleil. On demande :

a) le diamètre de l'image réelle du Soleil qui se forme à l'intérieur de l'instrument, sachant que le diamètre apparent du Soleil est d ;

b) la distance de cette image à l'objectif ;

c) le diamètre apparent du Soleil vu dans l'instrument.

Application numérique : $n = 20$; $D = 80$ cm ; $d = 32'$.

(*Dijon.*)

1° Désignons par f_1 et f_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire et par C_1 et C_2 les convergences de ces verres.

L'objet AB, constitué par la mire, est très éloigné : l'image intermédiaire, A_1B_1, donnée par l'objectif, est située sensiblement dans le plan focal image de celui-ci.

L'œil vise à l'infini : l'image A_1B_1 est dans le plan focal objet de l'oculaire, qui se confond donc avec le plan focal image de l'objectif. Dans les conditions de la visée, la lunette est afocale et la distance D des verres est

$$D = f_1 + f_2 = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \qquad (1)$$

Le grossissement de la lunette est défini par le rapport

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

La lunette étant afocale, nous avons

$$\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{A_1B_1}{f_2} \quad \text{et} \quad \alpha \approx \frac{A_1B_1}{f_1}.$$

$$G = \frac{\dfrac{A_1B_1}{f_2}}{\dfrac{A_1B_1}{f_1}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{C_2}{C_1}. \qquad (2)$$

G peut se mesurer par le procédé de la mire. L'observateur à vue normale voit simultanément à une distance Δ très grande (pratiquement infinie) l'image de la mire donnée par la lunette et la mire elle-même.

Dans l'expression $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ du grossissement, nous avons

$$\alpha' \approx \operatorname{tg}\alpha' = \frac{A'B'}{\Delta} \quad \text{et} \quad \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{\Delta},$$

d'où $$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\dfrac{A'B'}{\Delta}}{\dfrac{AB}{\Delta}} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Le grossissement de la lunette, dans ces conditions d'emploi, est égal au grandissement linéaire, $\frac{A'B'}{AB}$.

L'objet AB est l'intervalle de deux divisions de la mire : sa longueur est l.

Si l'œil confond une division de l'image de la mire et n divisions de la mire elle-même, la longueur A'B' de l'image de l'objet AB est

$$A'B' = nl.$$

Le grossissement G est donc

$$G = \frac{nl}{l} = n.$$

La relation (2) peut s'écrire

$$n = \frac{C_2}{C_1}. \qquad (3)$$

Les relations (1) et (3) forment un système de deux équations qui permettent de déterminer C_1 et C_2 :

$$\begin{cases} D = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \\ n = \frac{C_2}{C_1}. \end{cases}$$

Nous en tirons

$$D = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{nC_1} = \frac{n+1}{nC_1},$$

$$C_1 = \frac{n+1}{nD},$$

$$C_2 = \frac{n+1}{D}.$$

C_1 et C_2 seront exprimés en dioptries si D est donné en mètres.

Numériquement : $n = 20$; $D = 80$ cm ou 0,8 m.

$$C_1 = \frac{20 + 1}{20 \times 0{,}8} = \frac{21}{16} = 1{,}3125,$$

$$\mathbf{C_1 = 1{,}31 \text{ dioptrie.}}$$

$$C_2 = \frac{20 + 1}{0{,}8} = \frac{210}{8} = 26{,}25.$$

$$\mathbf{C_2 = 26{,}25 \text{ dioptries.}}$$

2° Par rapport à la Terre, le Soleil paraît se déplacer d'est en ouest, donc de la gauche vers la droite de l'observateur quand celui-ci regarde le Soleil. La lunette donnant une image renversée, l'observateur visant le Soleil à travers la lunette voit dans la lunette le Soleil se déplacer *de sa droite vers sa gauche* (fig. 1).

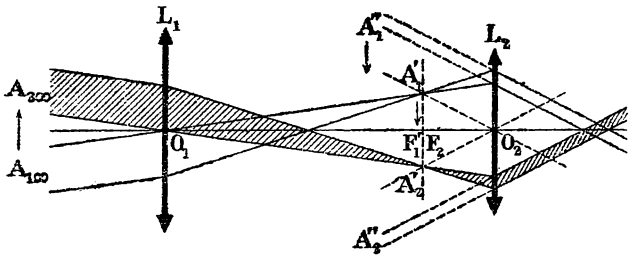


Fig. 1.

3° *a*) L'image du Soleil fournie par l'objectif se trouve dans son plan focal image. Soit A et B deux points diamétralement opposés du contour apparent du Soleil. Si l'angle sous lequel on voit ces deux points est d, le diamètre A_1B_1 de l'image réelle fournie par l'objectif est (fig. 2)

$$A_1B_1 = f_1 \times d = \frac{d}{C_1}.$$

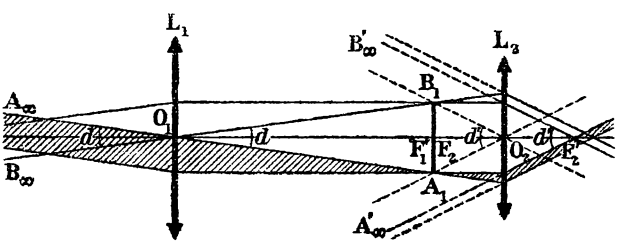


Fig. 2.

A_1B_1 est exprimé en mètres si d est donné en radians et C_1 en dioptries.

Numériquement :

$$d = 32' \text{ ou } \frac{\pi \times 32}{180 \times 60} \text{ radian}; \quad C_1 = 1{,}3125 \text{ dioptrie.}$$

$$A_1B_1 = \frac{\pi \times 32}{180 \times 60 \times 1{,}3125} = 0{,}00709 \text{ m},$$

$$\mathbf{A_1B_1 = 7{,}09 \text{ mm}.}$$

b) La distance de A_1B_1 à l'objectif est $f_1 = \frac{1}{C_1}$.

f_1 sera exprimé en mètres si C_1 est donné en dioptries.

Numériquement : $C_1 = 1{,}3125$ dioptries.

$$f_1 = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{1{,}3125} = \frac{16}{21} = 0{,}7619 \text{ m},$$

$$\mathbf{f_1 = 76{,}2 \text{ cm}.}$$

c) Le diamètre apparent de l'image A'B' est d' :

$$d' = \frac{A_1B_1}{f_2} = \frac{f_1 d}{f_2} = \frac{C_2}{C_1}\, d.$$

Numériquement :

$$C_1 = \frac{21}{16} \text{ dioptrie}; \quad C_2 = \frac{210}{8} \text{ dioptries}; \quad d = 32' \text{ ou } \frac{\pi \times 32}{180 \times 60} \text{ radian.}$$

$$d' = \frac{210}{8} \times \frac{16}{21} \times \frac{\pi \times 32}{180 \times 60} = \frac{20 \times \pi \times 32}{180 \times 60} \approx \frac{10}{54} \text{ radian},$$

$$d' = 640'.$$

$$\mathbf{d' = 10^\circ 40'.}$$

46. — Lunette astronomique. Grossissement et pouvoir séparateur. (Utilisation par un œil normal et un œil myope.)

Une lunette astronomique comprend un objectif de distance focale 1 mètre et un oculaire de puissance 60 dioptries.

1° Elle est d'abord utilisée par un œil normal, qui observe sans accommoder deux étoiles, E et H, dont la distance angulaire est 20 secondes.

***a*) L'axe de la lunette étant dirigé vers E, construire l'image et déterminer le grossissement.**

***b*) Déterminer l'angle sous lequel l'œil normal voit ces deux étoiles à travers la lunette.**

***c*) Le pouvoir séparateur de cet œil étant 1 minute, peut-il distinguer séparément les deux étoiles à l'œil nu et à travers la lunette ?**

Déterminer la plus petite distance angulaire de deux étoiles qui peuvent être vues distinctes à travers la lunette.

2° La lunette est ensuite utilisée par un myope qui accommode à son minimum de vision distincte qui est 8 cm.

***a*) De combien doit-il modifier le tirage de la lunette ? Faire une nouvelle construction de l'image.**

***b*) De combien varie le grossissement ?**

On suppose l'œil au foyer image de l'oculaire

(Alger.

Désignons par f_1 et f_2 les distances focales de l'objectif et de l'oculaire.

1° *a*) L'étoile E est à l'infini sur l'axe principal de l'objectif : son image, E_1, se confond avec le foyer principal image de celui-ci (fig. 1).

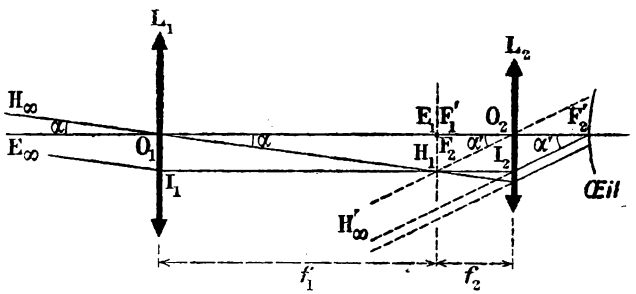


Fig. 1.

L'étoile H est à l'infini sur un axe secondaire faisant avec l'axe principal l'angle α (distance angulaire donnée) : son image, H_1, est située au foyer secondaire image correspondant à cet axe.

L'œil normal vise sans accommoder : les images finales, E′ et H′, sont virtuelles et infiniment éloignées. Le plan focal image de l'objectif, qui contient les images intermédiaires E_1 et H_1, est confondu avec le plan focal objet de l'oculaire : la lunette est afocale.

Le grossissement, G, est égal au rapport de l'angle α', sous lequel l'œil voit les deux étoiles à travers la lunette, à l'angle α.

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}. \qquad (1)$$

Si nous désignons par P_2 la puissance de l'oculaire, nous pouvons écrire

$$P_2 = \frac{\alpha'}{E_1H_1} \quad \text{et} \quad \alpha' = P_2 \times E_1H_1.$$

Par ailleurs, le triangle $E_1H_1O_1$ donne

$$E_1H_1 = O_1E_1 \times \alpha = f_1\alpha \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{E_1H_1}{f_1}$$

d'où

$$G = \frac{P_2 \times E_1H_1}{\frac{E_1H_1}{f_1}},$$

$$G = P_2 \times f_1. \qquad (2)$$

Le grossissement de la lunette est égal au produit de la puissance P_2 de l'oculaire par la distance focale f_1 de l'objectif. Dans cette formule P_2 doit être évaluée en dioptries et f_1 en mètres.

Application numérique :

$$P = 60 \text{ dioptries}, \quad f_2 = 1 \text{ mètre}.$$

$$G = 60 \times 1,$$

$$\mathbf{G = 60.}$$

b) L'angle α demandé est donné par la relation (1) :

$$\alpha' = G \times \alpha.$$

Numériquement :

$$\alpha = 20 \text{ secondes ou } \frac{\pi \times 20}{180 \times 3\,600} = \frac{\pi}{32\,400} \text{ radian}.$$

$$\alpha' = 60 \times \frac{\pi}{32\,400} = \frac{\pi}{540} \text{ radian},$$

$$\alpha' = \frac{180 \times 60}{\pi} \times \frac{\pi}{540} \text{ minutes},$$

$$\mathbf{\alpha' = 20'.}$$

c) Le pouvoir séparateur de l'œil est 1′ ou 3×10^{-4} radian.

A l'œil nu les deux étoiles, dont la distance angulaire est $\alpha = 20''$, ne peuvent être distinguées l'une de l'autre. A travers la lunette leur distance angulaire est $\alpha' = G\alpha$. Si cet angle α' est supérieur à 1′ les images des deux étoiles seront distinguées séparément. C'est le cas des étoiles E et H : la distance angulaire des images E′ et H′ est $20' > 1'$.

La plus petite distance angulaire des images I′ et J′ de deux étoiles I et J qui peuvent être vues de manière distincte à travers la lunette sera égale au pouvoir séparateur de l'œil. Si nous posons $\beta' = 1'$, nous pouvons déduire β, distance angulaire des étoiles vues à l'œil nu, de la relation $G = \frac{\beta'}{\beta}$:

$$\beta = \frac{\beta'}{G}.$$

Numériquement : $\beta' = 1'$ ou $\frac{\pi}{180 \times 60}$ radian; $G = 60$.

$$\beta = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60} \text{ radian},$$

$$\beta = 1''.$$

2° *a*) L'œil myope placé au foyer image de l'oculaire voit les images E′ et H′ virtuelles à la distance minimale de vision distincte δ

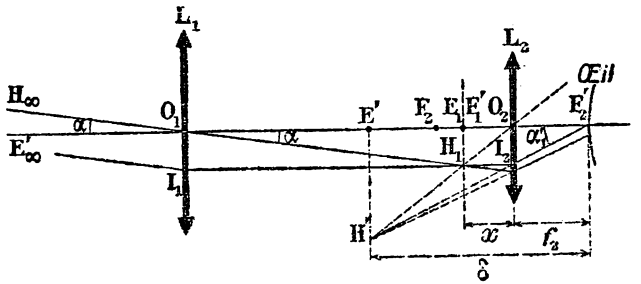


Fig. 2.

(fig. 2). Ces images sont donc à la distance $\delta - f_2$ de l'oculaire. Les images intermédiaires, E_1 et H_1, doivent être situées à une distance x de l'oculaire donnée par la formule de Descartes,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f_2},$$

dans laquelle $x' = -(\delta - f_2)$ (images virtuelles).

Nous en tirons

$$x = \frac{f_2 x'}{x' - f_2}$$

d'où

$$x = \frac{f_2(\delta - f_2)}{\delta}.$$

Cette distance est inférieure à f_2 : l'oculaire doit être rapproché de l'objectif.

La longueur de la lunette qui, dans le cas précédent, était

$$L = f_1 + f_2$$

est, dans ce cas, $L' = f_1 + x$.

Le tirage doit être modifié de

$$L - L' = f_2 - x = \frac{f_2^2}{\delta}.$$

Numériquement : $f_2 = \frac{1}{60}$ m ou $\frac{100}{60}$ cm, $\delta = 8$ cm.

$$L - L' = \left(\frac{100}{60}\right)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{100}{288} .$$

$$\mathbf{L - L' = 0{,}347\ cm.}$$

Remarque. — La relation $L - L' = \frac{f_2^2}{\delta}$ pouvait être obtenue plus simplement en appliquant la formule de Newton $xx' = f^2$ à l'oculaire.

En posant $x = F_1'E_1 = L - L'$, $x' = F_2E' = \delta$, $f = f_2$ nous avons $(L - L')\,\delta = f_2^2$.

b) Le grossissement est encore donné par la formule (2) : $G = P_2 \times f_1$. La puissance P_2 de l'oculaire n'a pas changé : l'œil de l'observateur étant au foyer image, elle est, dans les deux cas, égale à la puissance intrinsèque.

Le grossissement de la lunette a la même valeur que dans le premier cas.

L'examen de la figure 2 montre d'ailleurs que le grossissement, défini par le rapport

$$G = \frac{\alpha_1'}{\alpha},$$

est resté constant, les angles α_1' et α n'ayant pas varié.

47. — Lunette astronomique transformée en lunette terrestre. Grossissements comparés.

Une lunette astronomique est constituée par un objectif de 1 m de distance focale et un oculaire de 2 cm.

On veut transformer cette lunette astronomique en lunette terrestre, en interposant entre les deux verres une lentille convergente ayant 3 cm de distance focale et donnant, avec l'image d'un objet à l'infini fournie par l'objectif, une nouvelle image, renversée par rapport à la première et trois fois plus grande, qui sera ensuite examinée avec l'oculaire.

1° Dessiner la marche des rayons. Indiquer quelle devra être la position de la lentille intermédiaire par rapport à l'objectif et à l'oculaire. En déduire l'allongement de la lunette.

2° Quel est le grossissement de la lunette astronomique et celui de la lunette terrestre réalisée ?

N. B. — L'œil de l'observateur est normal et n'accommode pas.

(Pondichéry.)

1° L'œil normal n'accommodant pas voit à l'infini l'image définitive A'B' donnée par la lunette astronomique. L'image intermédiaire, A_1B_1, fournie par l'objectif est dans le plan focal objet de l'oculaire. L'objet AB étant à l'infini, l'image A_1B_1 qu'en donne l'objectif est dans le plan focal image de l'objectif (fig. 1). Dans ce cas le plan

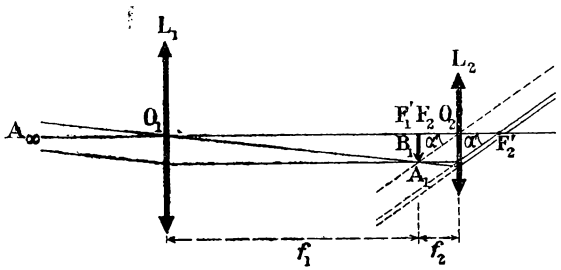


Fig. 1.

focal image de l'objectif et le plan focal objet de l'oculaire coïncident et la longueur de la lunette, distance des deux verres, a pour valeur

$$L = O_1O_2 = f_1 + f_2.$$

Numériquement : $f_1 = 1$ m ou 100 cm; $f_2 = 2$ cm,

$$L = 100 + 2 = 102 \text{ cm}.$$

2° Dans la lunette astronomique l'image définitive A'B' est renversée par rapport à l'objet AB parce que l'image A_1B_1 examinée par l'oculaire jouant le rôle de loupe est renversée par rapport à l'objet.

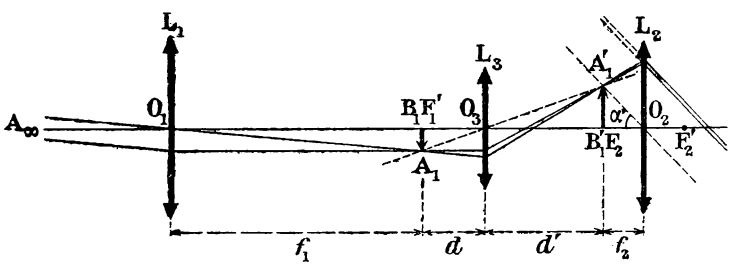


Fig. 2.

Pour avoir une image droite par rapport à l'objet il faudra remplacer l'image A_1B_1 par une image $A_1'B_1'$ renversée par rapport à A_1B_1. Ce renversement ou redressement sera réalisé au moyen d'une lentille convergente, L_3, placée à une distance de A_1B_1 supérieure à f_3, de manière à fournir une image réelle, $A_1'B_1'$, qui pourra être examinée au moyen de l'oculaire dans les mêmes conditions que A_1B_1 dans le cas précédent (fig. 2).

Cette lentille L_3 porte le nom de *véhicule*.

Connaissant le grandissement et la distance focale de L_2 nous déterminerons les distances d et d' de L_3 à A_1B_1 et à son image, $A_1'B_1'$.

Nous aurons par suite les distances $O_1O_3 = f_1 + d$, $O_3O_2 = d' + f_2$ de L_3 à l'objectif et à l'oculaire. La nouvelle longueur de la lunette sera alors

$$L' = f_1 + d + d' + f_2,$$

et son allongement,

$$L' - L = d + d'.$$

Les formules de position et de grandissement de Descartes s'écrivent *en prenant toutes les distances ainsi que le grandissement* γ *en valeur absolue :*

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f_3},$$

$$\frac{d'}{d} = \gamma.$$

Nous tirons de ces deux équations :

$$d = \frac{\gamma + 1}{\gamma} f_3 \quad \text{et} \quad d' = (\gamma + 1)$$

Nous avons donc pour O_1O_3, O_3O_2 et $L' - L$ les expressions

$$O_1O_3 = f_1 + d = f_1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma} f_3,$$

$$O_3O_2 = d' + f_2 = (\gamma + 1) f_3 + f_2,$$

$$L' - L = d + d' = \frac{\gamma + 1}{\gamma} f_3 + (\gamma + 1) f_3 = \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma} f_3.$$

Application numérique : $f_1 = 100$ cm; $f_2 = 2$ cm; $f_3 = 3$ cm; $\gamma = 3$.

$$O_1O_3 = 100 + \frac{3 + 1}{3} \times 3, \qquad \mathbf{O_1O_3 = 104\ cm;}$$

$$O_3O_2 = (3 + 1)\ 3 + 2, \qquad \mathbf{O_3O_2 = 14\ cm;}$$

$$L' - L = \frac{(3 + 1)^2}{3} \times 3, \qquad \mathbf{L' - L = 16\ cm.}$$

2° Le grossissement de la lunette astronomique et celui de la lunette terrestre ont la même définition. C'est le rapport $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de l'angle α' sous lequel on voit l'objet à travers l'instrument à l'angle α sous lequel on le voit à l'œil nu.

Dans le cas de la lunette astronomique (fig. 1),

$$\alpha' = \frac{A_1B_1}{f_2}, \qquad \alpha = \frac{A_1B_1}{f_1},$$

$$G = \frac{A_1B_1}{f_2} : \frac{A_1B_1}{f_1} = \frac{f_1}{f_2}.$$

Dans le cas de la lunette terrestre (fig. 2),

$$\alpha' = \frac{A_1'B_1'}{f_2} = \gamma \frac{A_1B_1}{f_2}, \qquad \alpha = \frac{A_1B_1}{f_1},$$

$$G' = \gamma \frac{A_1B_1}{f_2} : \frac{A_1B_1}{f_1} = \gamma \frac{f_1}{f_2}.$$

Le grossissement de la lunette terrestre est égal au grossissement de la lunette astronomique utilisée dans les mêmes conditions, multiplié par la valeur absolue du grandissement du véhicule.

Application numérique : $f_1 = 100$ cm; $f_2 = 2$ cm; $\gamma = 3$.

$$G = \frac{100}{2}, \qquad \mathbf{G = 50.}$$

$$G' = 3 \times \frac{100}{2}, \qquad \mathbf{G' = 150.}$$

CHAPITRE XIII

Dispersion de la lumière. Spectroscope.

48. — Spectroscope à prisme : déviation des rayons correspondant à deux radiations.

Un spectroscope à prisme se compose d'un collimateur dont la fente est placée au foyer de la lentille, d'un prisme d'angle au sommet égal à 60° et d'une lunette d'observation, munie d'un réticule, réglée sur l'infini, dont l'objectif a une distance focale de 20 cm. Ce spectroscope est réglé au minimum de déviation pour une radiation monochromatique pour laquelle l'indice du verre constituant le prisme est 1,517 9.

1° Représenter, dans ce cas, la marche du faisceau lumineux à travers l'instrument.

2° Calculer l'angle que fait l'axe optique du collimateur avec celui de la lunette lorsque celle-ci est pointée sur l'image de la fente donnée par le spectroscope pour la radiation considérée (angle de déviation).

3° Le faisceau lumineux qui tombe sur la fente du collimateur contient aussi une autre radiation monochromatique, pour laquelle l'indice du verre constituant le prisme est 1,519 5. L'appareil restant réglé au minimum de déviation pour la première radiation, quel est l'angle de déviation pour la seconde ?

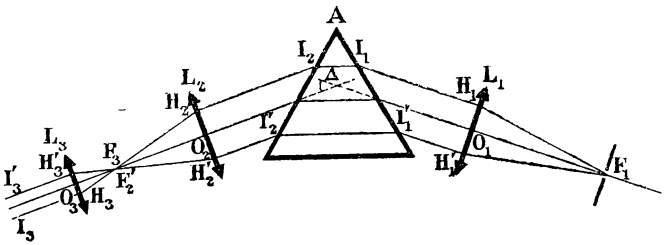
(Aix-Marseille.)

1° La marche du faisceau lumineux à travers l'instrument est représentée par la figure ci-après.

La fente éclairée par une source de lumière monochromatique se projette en F_1 sur le plan de figure. Elle est dans le plan focal objet de la lentille collimatrice, L_1, et son milieu, F_1, coïncide avec le foyer principal objet de L_1.

Le faisceau issu de F_1 et qui sort de L_1 est parallèle et se projette suivant H_1I_1, $H_1'I_1'$. Il traverse le prisme au minimum de déviation. A l'intérieur du prisme il est perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre A. Il émerge du prisme parallèlement et se projette suivant I_2H_2, $I_2'H_2'$.

L'objectif, L_2, de la lunette d'observation qui reçoit ce dernier faisceau le fait converger au point F'_2, foyer principal image de L_2. La lunette d'observation étant réglée pour l'infini, le foyer principal objet, F_3, de L_3 et le foyer principal image, F'_2, de L_2 coïncident, de sorte que, à la sortie de L_3 le faisceau issu de F_2 (ou de F_3) est parallèle à O_3F_3 et se projette suivant H_3I_3, $H'_3I'_3$.



Les faisceaux issus des autres points de la fente objet se projettent sur la figure suivant les mêmes droites. L'ensemble des images des autres points de la fente données par la lentille L_2 est une droite se projetant en F'_2, où se trouve la croisée des fils du réticule.

2° L'axe optique du collimateur est la droite F_1O_1. L'axe optique de la lunette d'observation est la droite $O_2F'_2$. F_1O_1 est parallèle à H_1I_1; $O_2F'_2$ est parallèle à I_2H_2 si l'image de la fente fournie par L_2 passe par F'_2 et par le réticule. L'angle des deux axes optiques est donc le même que celui des rayons qui entrent et sortent du prisme : c'est l'angle de déviation minimal, Δ. Cet angle Δ est lié à l'angle du prisme et à l'indice du prisme pour la lumière monochromatique considérée par la relation

$$n = \frac{\sin\dfrac{A+\Delta}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}, \quad \text{ou} \quad \sin\frac{A+\Delta}{2} = n\sin\frac{A}{2}.$$

Connaissant n et A nous pouvons donc en déduire Δ.

Application numérique : $n = 1{,}517\,9$; $A = 60°$, $\sin\dfrac{A}{2} = \sin 30° = 0{,}5$.

$$\sin\frac{60+\Delta}{2} = 1{,}517\,9 \times 0{,}5 = 0{,}758\,95.$$

La table des valeurs naturelles des lignes trigonométriques donne

$$0{,}758\,95 = \sin 49°\,22'\,20'',$$
$$\frac{60+\Delta}{2} = 49°\,22'\,20'',$$
$$60 + \Delta = 98°\,44'\,40'',$$
$$\Delta = 98°\,44'\,40'' - 60°,$$
$$\Delta = \mathbf{38°\,44'\,40''}.$$

3° Si l'on utilise une radiation monochromatique différente de la précédente l'indice du prisme pour cette nouvelle radiation prend la valeur n' et l'angle de déviation minimal la valeur Δ'. Nous aurons encore

$$n' = \frac{\sin \frac{A + \Delta'}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

ou

$$\sin \frac{A + \Delta'}{2} = n' \sin \frac{A}{2}.$$

Nous calculerons Δ' par le procédé précédent.

Les deux radiations étant contenues dans la lumière qui éclaire la fente du collimateur, les deux faisceaux parallèles fournis par le collimateur et tombant sur le prisme seront confondus. Les deux faisceaux se sépareront à l'intérieur du prisme et, à l'extérieur, ils feront entre eux l'angle $\alpha = \Delta' - \Delta$.

Nous pourrons en déduire la distance des deux images de la fente dans le plan focal de l'objectif :

$$l = f_2 \alpha = f_2 (\Delta' - \Delta).$$

Application numérique :

$$n' = 1{,}5195; \quad A = 60^\circ; \quad \sin \frac{A}{2} = \sin 30^\circ = 0{,}5; \quad f_2 = 20 \text{ cm}.$$

$$\sin \frac{60 + \Delta'}{2} = 1{,}5195 \times 0{,}5 = 0{,}759\,75.$$

La table des valeurs naturelles des lignes trigonométriques donne

$$0{,}759\,75 = \sin 49^\circ\, 26'\, 32'',$$
$$60 + \Delta' = 98^\circ\, 53'\, 4'',$$
$$\Delta' = 98^\circ\, 53'\, 4'' - 60^\circ,$$
$$\Delta' = 38^\circ\, 53'\, 4''.$$

$$\alpha = \Delta' - \Delta = 38^\circ\, 53'\, 4'' - 38^\circ\, 44'\, 40'' = 8'\, 24'',$$
$$\alpha = 0{,}002\,45 \text{ radian},$$
$$l = 20 \times 0{,}002\,45 = 0{,}049 \text{ cm}.$$

49. — Spectroscope à prisme : marche des rayons, diamètre apparent du spectre obtenu en lumière blanche.

Une lentille convergente, L, est éclairée en lumière jaune par une fente rectangulaire, F, de largeur AB = 1 mm, normale à son axe et dont le centre, C, est sur cet axe. Elle envoie un faisceau de rayons parallèles sur l'objectif, MN, d'une petite lunette astronomique centrée sur le même axe et réglée pour la vision à l'infini. L'œil de l'observateur est dans le plan de l'image, M'N', que l'oculaire de la lunette donne de son objectif MN.

1° Déterminer la position et la grandeur de M'N'. Tracer la marche d'un faisceau de rayons issus du centre C de la fente.

2° Déterminer en position et en grandeur l'image A'B' de la largeur AB de la fente donnée par le système « lentille L — objectif MN ». Tracer la marche d'un faisceau de rayons depuis le bord A de la fente situé à 0,5 mm au-dessus de l'axe jusqu'à l'œil.

3° Entre la lentille L et la lunette on dispose, au minimum de déviation, un prisme en verre d'indice $n = 1{,}532$ pour le jaune, dont la section principale est un triangle équilatéral. De quel angle doit tourner l'axe de la lunette pour que l'œil puisse observer de nouveau l'image de la fente ? Marche des rayons issus de C à travers le système lentille-prisme-lunette.

4° La fente F est éclairée par une source de lumière blanche. Que devient la marche des rayons issus de C à travers le système lentille-prisme-objectif MN ? A la sortie du prisme, l'angle que font entre elles les directions des rayons rouges et violets est égal à $\frac{3}{2}$ degré. Calculer l'angle sous lequel l'œil voit ce spectre.

Données numériques :

Lentille L : distance focale $\Phi = 15$ cm ;

Lunette astronomique. — Objectif : MN = 4 cm; distance focale F = 20 cm ; convergence de l'oculaire : 20 dioptries.

α	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°
$\sin\alpha$	0,720	0,731	0,743	0,755	0,766	0,777	0,788

Pour faire les figures on pourra supposer que la distance qui sépare L de MN est égale à 10 cm.

Paris

1° L'image M'N' que l'oculaire de la lunette donne de l'objectif porte le nom de *cercle oculaire*.

La lunette étant réglée pour la vision à l'infini d'un objet lui-même à l'infini, le plan focal image de l'objectif et le plan focal objet de l'oculaire coïncident. L'objectif MN est à la distance $p = F + f$ de l'oculaire. La distance à l'oculaire et la grandeur de l'image M'N' sont données par les formules de Descartes.

La formule de position, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$, donne

$$p' = \frac{pf}{p - f} = \frac{(F + f)f}{F + f - f} = (F + f)\frac{f}{F}.$$

La formule de grandissement, $\gamma = -\frac{p'}{p}$, donne

$$\frac{M'N'}{MN} = |\gamma| = \left| -\frac{f}{p-f} \right| = \frac{f}{F},$$

et, par suite,

$$M'N' = MN \times \frac{f}{F}.$$

Application numérique :

$$F = 20 \text{ cm}; \quad f = \frac{1}{20} \text{ m ou } 5 \text{ cm}; \quad MN = 4 \text{ cm}.$$

$$p' = (20 + 5)\frac{5}{20}, \qquad p' = +\mathbf{6{,}25\ cm}.$$

$$M'N' = 4 \times \frac{5}{20}, \qquad \mathbf{M'N' = 1\ cm}.$$

Le cercle oculaire est donc réel; il est situé à 6,25 cm de la lentille et son diamètre est 1 cm (fig. 1).

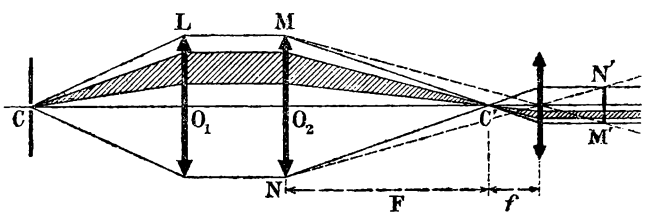


Fig. 1.

Un rayon quelconque qui a traversé à la fois l'objectif et l'oculaire passe à l'intérieur de ce cercle. La position de l'œil la plus favorable pour l'observation est celle du cercle oculaire : la pupille de l'œil coïncidant avec le cercle oculaire pourra recevoir la totalité de la lumière ayant traversé la lunette.

2° Pour déterminer en position et grandeur l'image A'B' de la largeur AB de la fente F donnée par le système « lentille L — objectif MN » nous considérerons chaque point de la fente.

Le point C milieu de AB est sur l'axe principal de la lentille L.

Le faisceau provenant de C après avoir traversé la lentille L est parallèle à CO_1 : C est donc confondu avec le foyer principal objet de L. La fente F est alors contenue dans le plan focal objet de L, qui donnera pour chacun des points de la fente un faisceau parallèle à l'axe secondaire correspondant à ce point.

La lentille MN recevant des faisceaux parallèles de différentes directions les fait converger dans son plan focal image.

Ainsi l'image A'B' de AB fournie par le système « lentille L — objectif MN » se trouvera dans le plan focal image de MN (fig. 2).

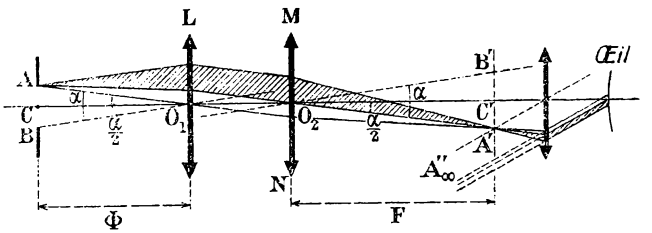


Fig. 2.

A' étant sur l'axe secondaire O_2A' incliné de $\frac{\alpha}{2}$ sur l'axe principal O_2C', la distance A'C' est donnée par la relation $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{A'C'}{F}$.

Mais l'axe secondaire AO_1 fait aussi l'angle $\frac{\alpha}{2}$ avec l'axe principal CO_1 et la distance AC est donnée par la relation $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{\Phi}$.

Nous avons donc $\frac{A'C'}{F} = \frac{AC}{\Phi}$ et, comme $A'B' = 2\,A'C'$ et $AB = 2\,AC$, la largeur A'B' de l'image de la fente aura pour expression

$$A'B' = AB \times \frac{F}{\Phi}.$$

Application numérique : $AB = 1$ mm ou 0,1 cm; $F = 20$ cm; $\Phi = 15$ cm.

$$A'B' = 0{,}1 \times \frac{20}{15} = 0{,}133 \text{ cm},$$

$$\mathbf{A'B' = 1{,}33\ mm.}$$

3° Le prisme étant réglé au minimum de déviation pour la lumière monochromatique jaune, les rayons provenant du point C, milieu de la fente, traversent le prisme perpendiculairement au plan bissecteur. La déviation de ce faisceau est égale à la déviation minimale Δ.

C'est donc de l'angle Δ qu'il faudra tourner la lunette pour observer de nouveau l'image de la fente (fig. 3).

L'angle Δ est lié à l'indice n du prisme pour la lumière considérée et à l'angle A du prisme par la relation

$$n = \frac{\sin \frac{A + \Delta}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

ou par la relation

$$\sin \frac{A + \Delta}{2} = n \sin \frac{A}{2},$$

qui nous donne Δ.

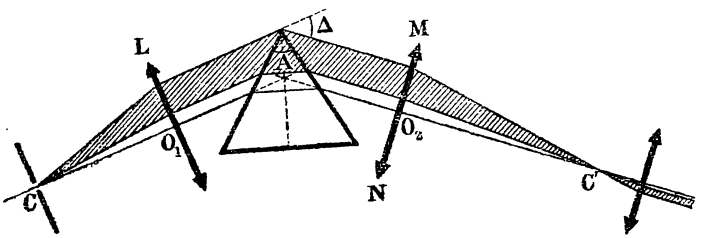


Fig. 3.

Application numérique : $n = 1{,}532$; $A = 60^\circ$; $\sin \frac{A}{2} = \sin 30^\circ = 0{,}5$

$$\sin \frac{60^\circ + \Delta}{2} = 1{,}532 \times 0{,}5 = 0{,}766.$$

La table des valeurs naturelles des lignes trigonométriques donne $0{,}766 = \sin 50^\circ$.

$$\sin \frac{60^\circ + \Delta}{2} = \sin 50^\circ,$$

$$\frac{60^\circ + \Delta}{2} = 50^\circ,$$

$$60^\circ + \Delta = 100^\circ,$$

$$\Delta = \mathbf{40^\circ}.$$

L'angle que devra former l'axe O_2C de la lunette avec l'axe CO_1 du collimateur sera égal à 40° (fig. 3).

4° A la traversée du prisme le faisceau parallèle de lumière blanche fourni par le collimateur est dispersé. Les rayons jaunes traversent le

prisme au minimum de déviation perpendiculairement au plan bissecteur du prisme : ils viennent converger en C′ dans le plan focal image de MN (fig. 4).

Les rayons rouges, pour lesquels l'indice n_r a une valeur inférieure à celui des rayons jaunes n_j, sont moins déviés; leur direction fait l'angle α_r avec l'axe principal O_2C' de MN : ils viennent converger en R dans le plan focal image de MN.

Les rayons violets, pour lesquels l'indice n_v a une valeur supérieure à celui des rayons jaunes n_j, sont plus déviés; leur direction fait l'angle α_v avec l'axe principal O_2C' de MN : ils viennent converger en V dans le plan focal image de MN.

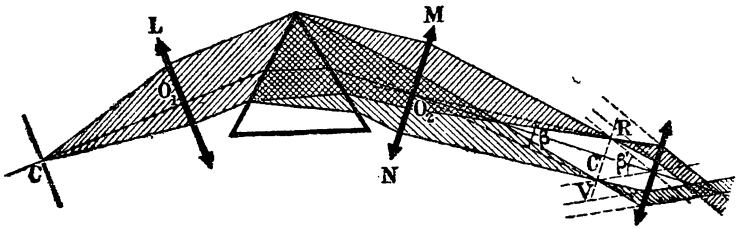


Fig. 4.

La largeur du spectre dans le plan focal image de MN est

$$RC' + C'V = F \operatorname{tg} \alpha_r + F \operatorname{tg} \alpha_v \approx F \times \alpha_r + F \times \alpha_v,$$
$$RV = F(\alpha_r + \alpha_v) = F\beta.$$

L'angle β' sous lequel on voit ce spectre à travers l'oculaire est

$$\beta' = \frac{RV}{f},$$

puisque RV est dans le plan focal objet de l'oculaire;

donc
$$\beta' = \beta \frac{F}{f}.$$

Application numérique : $\beta = \frac{3}{2}$ degré ou $\frac{\pi \times 3}{180 \times 2} = \frac{\pi}{120}$ radian;

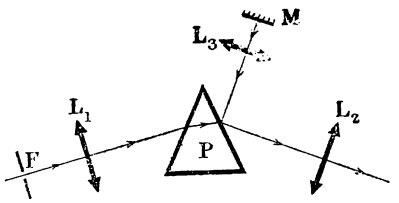
$F = 20$ cm; $f = 5$ cm.

$$\beta' = \frac{\pi}{120} \times \frac{20}{5} = \frac{\pi}{30} \text{ radian},$$

$$\beta' = 6^{\circ}.$$

50. — Spectroscope à prisme : étude de l'image réelle d'un spectre.

On considère le spectroscope représenté schématiquement par la figure ci-contre. Le prisme P reçoit un faisceau de rayons parallèles issu de la lentille collimatrice, L_1. La lentille L_2, dont la longueur focale est égale à 20 cm, donne le spectre de la lumière étudiée, constitué par les images monochromatiques de la fente F. Afin de permettre à l'observateur de repérer ces dernières images ou raies spectrales, l'instrument est muni d'un collimateur auxiliaire formé d'une lentille, L_3, de 5 cm de longueur focale, dans le plan focal de laquelle se trouve une graduation en dixièmes de millimètre. La lame de verre, M, qui porte cette graduation, convenablement éclairée, émet des rayons qui se réfléchissent sur la face de sortie du prisme et traversent ensuite l'objectif L_2.



1° On constate, à l'aide d'une loupe, que deux raies spectrales coïncident avec les images de deux traits de la graduation distants (sur le micromètre lui-même) de 0,4 mm. En déduire l'angle que font, à la sortie du prisme, les faisceaux qui donnent naissance aux deux raies considérées.

2° On place à 15 cm de L_2, à l'opposé du prisme, une lentille divergente de 10 cm de longueur focale, ayant le même axe que L_2. On observe alors le spectre à travers un écran de verre dépoli placé derrière la lentille divergente. Où faut-il placer cet écran pour que les raies spectrales soient aussi nettes que possible ?

3° Le grain du verre dépoli ne permet pas de distinguer deux images dont la distance est inférieure à 0,08 mm. En déduire la valeur limite de l'angle que font, à la sortie du prisme, les faisceaux qui correspondent à deux raies pouvant être observées séparément sur l'écran de verre dépoli.

Les angles seront exprimés en minutes et fractions de minute. On rappelle que 1 minute équivaut à $\frac{3}{10\,000}$ radian.

(Lyon.)

1° La lentille L_2 reçoit : *a*) des faisceaux parallèles monochromatiques ayant traversé le prisme et de directions différentes; *b*) des faisceaux parallèles produits par la lentille L_3 et réfléchis sur la face de

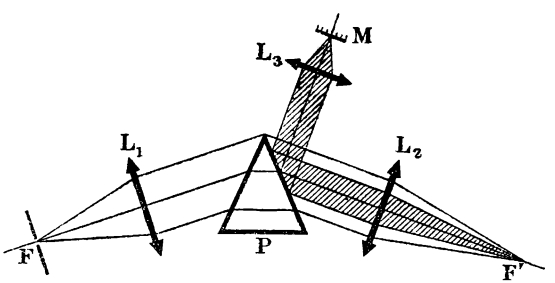


Fig. 1.

sortie du prisme. Chacun de ces faisceaux vient converger dans le plan focal image de la lentille L_2 (fig. 1).

On observe donc, dans ce plan focal, l'image de la graduation du micromètre sur laquelle se détachent les raies spectrales, images monochromatiques de la fente F.

Si A′ et B′ sont les images de deux traits A et B de la graduation micrométrique M, les axes secondaires O_2A' et O_2B' font entre eux un angle α qui est l'angle des faisceaux incidents parallèles (fig. 2).

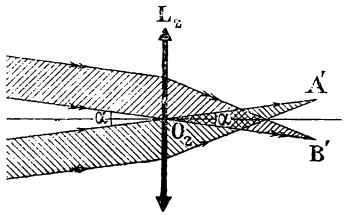


Fig. 2.

Cet angle α est aussi l'angle des faisceaux parallèles fournis par la lentille L_3, la réflexion sur la face de sortie du prisme n'ayant pas modifié l'angle des faisceaux. Il correspond à deux points A et B situés dans le plan focal objet de L_3 sur des axes secondaires O_3A et O_3B (fig. 3).

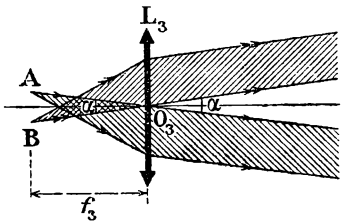


Fig. 3.

Les faisceaux parallèles monochromatiques qui donnent deux raies spectrales en A′ et B′ font également le même angle α à leur sortie du prisme.

L'angle α cherché est donné par la relation

$$\alpha = \frac{AB}{f_3}.$$

Application numérique : AB = 0,4 mm; f_3 = 5 cm ou 50 mm.

$$\alpha = \frac{0{,}4}{50} = \frac{4}{500} = 0{,}008 \text{ radian}$$

ou, en minutes sexagésimales,

$$\alpha = \frac{0{,}008}{0{,}000\,3} = \frac{80}{3} \text{ minutes},$$

$$\alpha = 26',66.$$

2° La lentille divergente L_4 étant placée à 15 cm de L_2, entre L_2 et le plan focal image de L_2, donne une image réelle du spectre obtenu dans ce plan (fig. 4).

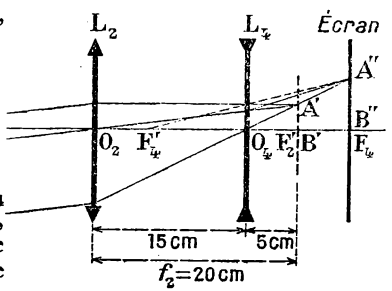


Fig. 4.

Nous supposerons en A′ et B′ deux des raies du spectre fourni par L_2. Cette image joue le rôle d'objet *virtuel*, situé à la distance

$20 - 15 = 5$ cm de la lentille L_2, pour cette lentille qui en donne une image définitive, $A''B''$, à la distance p'.

La formule de Descartes, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f_4}$, donne

$$p' = \frac{pf_4}{p - f_4}.$$

Cette relation est valable avec les conventions de signe habituelles.

Numériquement : $p = -5$ cm (objet virtuel); $f_4 = -10$ cm (lentille divergente).

$$p' = \frac{(-5) \times (-10)}{(-5) - (-10)} = \frac{50}{5}, \qquad p' = +\mathbf{10\ cm.}$$

p' étant positif, l'image définitive est bien réelle.

L'écran de verre dépoli sur lequel se formeront les raies spectrales devra être placé à 10 cm de la lentille divergente.

3° Deux images (raies spectrales) en A'' et B'' sur le verre dépoli ne sont distinctes que si leur distance $A''B''$ est supérieure ou égale à ε mm.

Il correspond à ces deux images, fournies par la lentille divergente L_4, deux autres images, A' et B'. Le rapport des distances $A''B''$ et $A'B'$, $\frac{A''B''}{A'B'}$, est le grandissement de la lentille L_4 pris en valeur absolue :

$$\frac{A''B''}{A'B'} = \left| -\frac{p'}{p} \right| = \left| \frac{-f_4}{p - f_4} \right|.$$

En désignant par β l'angle $A'O_2B'$ nous avons

$$A'B' = f_2 \times \beta;$$

et, en posant $A''B'' = \varepsilon$, la relation précédente s'écrit

$$\frac{\varepsilon}{f_2 \times \beta} = \left| \frac{-f_4}{p - f_4} \right|.$$

L'angle $\beta = \widehat{A'O_2B'}$ est aussi la valeur limite de l'angle que font à la sortie du prisme les faisceaux parallèles qui correspondent aux raies spectrales A'' et B''. β a pour expression

$$\beta = \frac{\varepsilon}{f_2} \times \left| \frac{p - f_4}{-f_4} \right|.$$

Application numérique : $e = 0{,}08$ mm ou $0{,}008$ cm; $f_2 = +20$ cm; $p = -5$ cm; $f_4 = -10$ cm.

$$\beta = \frac{0{,}008}{20} \times \left| \frac{-5-(-10)}{-(-10)} \right| = \frac{0{,}008}{20} \times \frac{5}{10} = 0{,}000\,2 \text{ radian},$$

ou, en minutes sexagésimales,

$$\beta = \frac{0{,}000\,2}{0{,}000\,3},$$

$$\beta = 0',666.$$

CHAPITRE XIV

Loi d'Ohm pour des résistances mortes. Loi de Joule. Énergie électrique.

51. — Résistance électrique. Loi d'Ohm. Coefficient de température.

1° La résistance électrique d'un fil de platine de 0,1 mm de diamètre et de 1 m de long est, à 0 °C,

$$R_0 = 15 \text{ ohms}.$$

Calculer la résistivité, ρ_0, du platine à 0 °C, à $\frac{1}{100}$ près. Prendre $\pi = 3{,}14$.

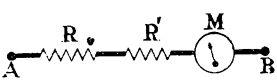
2° Ce fil est mis en série avec une résistance fixe

$$R' = 10 \text{ ohms}$$

et un milliampèremètre M. La différence de potentiel disponible entre A et B (figure) est V = 1 volt.

Quelle est l'indication i_0 du milliampèremètre lorsque le fil de platine est plongé dans la glace fondante ?

3° Le montage restant le même, on plonge le fil de platine dans l'eau bouillante. Le milliampèremètre accuse une intensité de courant $i_{100} = 32{,}5$ milliampères.



a) Quelle est la résistance, R_{100}, du fil de platine à 100 °C ?

b) Admettant que la résistance R du platine varie linéairement en fonction de la température t, calculer le coefficient α de la formule $R = R_0(1 + \alpha t)$.

4° Toujours avec le même montage, on plonge le fil de platine dans l'oxygène liquide. Le milliampèremètre indique une intensité $i_\theta = 69$ milliampères.

a) Quelle est la résistance R_θ du fil à la température θ de l'oxygène liquide ?

b) Quelle est la température θ ?

(Montpellier.)

1° La résistance R d'un conducteur cylindrique homogène de résistivité ρ, de longueur l et de section s est donnée par la formule

$$R = \rho \frac{l}{s} \cdot$$

Si d est le diamètre du fil, $s = \pi \frac{d^2}{4}$. La résistance a pour expression

$$R = \frac{4\rho l}{\pi d^2} \cdot$$

Nous en déduisons la résistivité ρ :

$$\rho = R \frac{\pi d^2}{4l} \cdot$$

R dépend de la température. Il en est de même de ρ.

A 0 °C nous avons

$$\rho_0 = R_0 \frac{\pi d^2}{4l} \cdot$$

Numériquement : $R_0 = 15\ \Omega$, $d = 0{,}1$ mm, ou $0{,}0001$ m, $l = 1$ m.

$$\rho_0 = 15 \times \frac{3{,}14 \times (0{,}0001)^2}{4 \times 1} = 11{,}775 \times 10^{-8}. \ \Omega m \ .$$

Calculer ρ_0 à $\frac{1}{100}$ près, c'est négliger, dans le nombre qui l'exprime, les chiffres au-delà d'un certain rang, de manière que l'erreur relative $\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0}$ commise de ce fait soit inférieure ou égale à $\frac{1}{100}$ ·

Si nous posons

$$\frac{\Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{100},$$

$$\Delta\rho_0 = \rho_0 \times \frac{1}{100} = 11{,}775 \times 10^{-8} \times \frac{1}{100} \approx 0{,}12 \times 10^{-8}$$

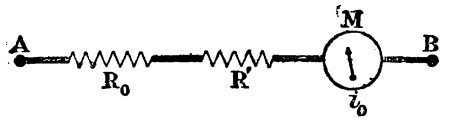
Dans le nombre 11,775 nous devrons conserver les deux chiffre avant la virgule et celui qui la suit en arrondissant ce dernier.

L'erreur absolue commise en négligeant les chiffres suivants est $0{,}025 \times 10^{-8} < 0{,}12 \times 10^{-8}$; l'erreur relative, $\frac{0{,}025}{11{,}775} = \frac{1}{471}$, est inférieure à $\frac{1}{100}$. Nous écrirons donc

$$\rho_0 = 11{,}8 \times 10^{-8}\ \Omega m.$$

2° Lorsque le fil de platine, en série avec la résistance fixe et le milliampèremètre, est placé dans la glace fondante, sa résistance est R_0. Le courant i_0 qui parcourt la portion de circuit AB, quand on établit entre ses bornes la d.d.p.V, est donné par la loi d'Ohm pour un ensemble de résistances mortes en série :

$$V = i_0 \Sigma R.$$



Admettant implicitement que la résistance du milliampèremètre est négligeable devant R_0 et R', nous avons

$$\Sigma R = R_0 + R'.$$

Le milliampèremètre marquera

$$i_0 = \frac{V}{R_0 + R'}.$$

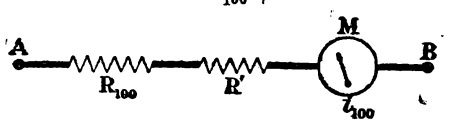
Numériquement : $V = 1$ volt, $R_0 = 15\ \Omega$, $R' = 10\ \Omega$.

$$i_0 = \frac{1}{15 + 10} = \frac{1}{25} = 0{,}04 \text{ A.}$$

$$\mathbf{i_0 = 40 \text{ mA.}}$$

3° *a*) Le fil de platine plongé dans l'eau bouillante, à 100 °C, a une résistance R_{100}. La résistance R' n'ayant pas changé, pas plus que la différence de potentiel V, l'intensité i_{100} dans la portion de circuit AB est

$$i_{100} = \frac{V}{R_{100} + R'}.$$



Nous tirons de cette équation

$$R_{100} = \frac{V}{i_{100}} - R'.$$

Numériquement :

$V = 1$ volt, $i_{100} = 32{,}5$ mA ou $0{,}032\,5$ A, $R' = 10\ \Omega$.

$$R_{100} = \frac{1}{0{,}032\,5} - 10 = \frac{10\,000}{325} - 10 = 20{,}769$$

$$\mathbf{R_{100} = 20{,}8\ \Omega.}$$

b) La résistance R du platine variant linéairement en fonction de la température t est représentée par l'équation

$$R = R_0 (1 + \alpha t), \qquad (1)$$

dans laquelle α est une constante appelée coefficient de température du fil.

A la température $t = 100\,^{\circ}C$, $R = R_{100}$.

L'équation précédente s'écrit

$$R_{100} = R_0 (1 + 100\,\alpha).$$

Nous en tirons α :

$$\alpha = \frac{R_{100} - R_0}{100\ R_0}. \qquad (2)$$

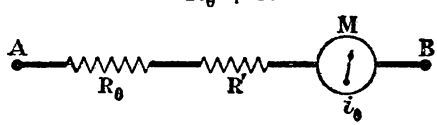
Numériquement : $R_{100} = 20{,}769\ \Omega$, $R_0 = 15\ \Omega$.

$$\alpha = \frac{20{,}769 - 15}{100 \times 15} = \frac{5{,}769}{1\,500} = 0{,}003\,846.$$

$$\alpha = \mathbf{0{,}00385.}$$

4° *a*) Le fil de platine plongé dans l'oxygène liquide à la température inconnue θ a une résistance R_θ. Comme R' et V n'ont pas changé, l'intensité i_θ dans la portion de circuit AB est

$$i_\theta = \frac{V}{R_\theta + R'}.$$



De cette équation nous tirons R_θ :

$$R_\theta = \frac{V}{i_\theta} - R'.$$

Numériquement : $V = 1$ volt, $i_\theta = 69$ mA ou 0,069 A, $R' = 10\ \Omega$.

$$R_\theta = \frac{1}{0{,}069} - 10 = 4{,}492\ \Omega.$$

$$\mathbf{R_\theta = 4{,}49\ \Omega.}$$

b) L'équation (1) devient, pour $t = \theta$,

$$R_\theta = R_0 (1 + \alpha\theta).$$

Nous en tirons la valeur de la température θ :

$$\theta = \frac{R_\theta - R_0}{R_0 \alpha}.$$

En remplaçant α par la valeur donnée par l'équation (2) nous avons

$$\theta = 100 \frac{R_\theta - R_0}{R_{100} - R_0}. \qquad (3)$$

Numériquement : $R_\theta = 4{,}492\ \Omega$, $R_0 = 15\ \Omega$, $R_{100} = 20{,}769\ \Omega$.

$$\theta = 100 \times \frac{4{,}492 - 15}{20{,}769 - 15} = -182{,}1\ ^\circ C.$$

$$\theta = -182\ ^\circ C.$$

La relation (3), donnant θ en fonction des résistances à θ °C, 100 °C et 0 °C d'un fil de platine, permet une détermination « approchée » de la température dans l'échelle centésimale ou Celsius. Le fil peut être considéré comme un thermomètre à résistance de platine : on aurait une détermination plus rigoureuse de θ en prenant au lieu de la formule (1) une formule non linéaire.

52. — Loi de Joule : étude d'une bouilloire électrique.

On veut fabriquer une bouilloire électrique utilisable à volonté avec 110 volts ou avec 220 volts et capable d'élever en 10 minutes la température de 1 litre d'eau de 13 °C à 100 °C. Son corps de chauffe comprendra deux résistances, x et y ; pour 220 volts, les deux résistances seront en série dans le circuit ; pour 110 volts la résistance x seule sera parcourue par le courant.

1° Quelle valeur faudra-t-il donner à x et à y, en supposant négligeables les pertes de chaleur par rayonnement, conductibilité, etc. ?

2° Ces résistances seront faites d'un fil de nichrome ayant 0,25 mm de diamètre. Quelle longueur de fil faudra-t-il employer pour chacune d'elles, sachant que 1 mètre de fil de ce nichrome a une résistance de 0,5 ohm quand il a 1 mm de diamètre ?

3° Le prix du kilowatt-heure étant 18 F, à combien reviendra l'échauffement de 1 litre d'eau de 13 °C à 100 °C, réalisé avec l'appareil précédent ?

Equivalent mécanique de la calorie : 4,18 joules.

(Caen)

1° Dans les deux cas d'utilisation de la bouilloire, l'énergie calorifique mise en jeu est la même.

Si nous prenons égale à 1 calorie par gramme et par degré la chaleur massique de l'eau, l'élévation de la température de M grammes d'eau de θ °C à θ′ °C nécessite une quantité de chaleur

$$1 \times M \times (\theta' - \theta) \text{ calories}$$

ou $$W = 4{,}18 \times 1 \times M \times (\theta' - \theta) \text{ joules.} \qquad (1)$$

Les pertes de chaleur par rayonnement, conductibilité, etc., étant négligeables, cette quantité de chaleur est égale à celle qui a été fournie par le courant et qui est donnée par la loi de Joule.

D'après cette loi le dégagement de chaleur dans une résistance morte R ohms parcourue par un courant I ampères pendant t secondes a pour valeur

$$W = RI^2t \text{ joules.}$$

Dans le premier cas d'utilisation de la bouilloire, la résistance x seule étant alimentée sous V volts, nous avons

$$W = x \times I^2 \times t.$$

I, intensité du courant, nous est donnée par la loi d'Ohm pour une résistance morte : $V = x \times I$.

Éliminant I entre ces deux relations nous avons

$$W = x \times \frac{V^2}{x^2} \times t = \frac{V^2 \times t}{x},$$

et, en tenant compte de la relation (1), nous obtenons x.

$$x = \frac{V^2 \times t}{4{,}18 \times 1 \times M \times (\theta' - \theta)}. \qquad (2)$$

Dans le deuxième cas d'utilisation de la bouilloire, les résistances x et y placées en série étant alimentées sous V′ volts, les deux lois de Joule et d'Ohm s'écrivent

$$W = (x + y)\, I'^2 \times t,$$
$$V' = (x + y)\, I'.$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$x + y = \frac{V'^2 \times t}{4{,}18 \times 1 \times M \times (\theta' - \theta)}. \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3) permettent de calculer x et y.

Application numérique : V = 110 volts, t = 10 mn, ou 600 s, M = 1 000 g (masse de 1 litre d'eau), $\theta' - \theta = 100 - 13 = 87$ °C, V′ = 220 volts.

$$x = \frac{110^2 \times 600}{4{,}18 \times 1 \times 1\,000 \times 87} = \frac{7\,260}{363{,}66} \approx \frac{7\,260}{363},$$

$$x = \mathbf{20\ \Omega}.$$

$$x + y = \frac{220^2 \times 600}{4{,}18 \times 1 \times 1\,000 \times 87} = \frac{29\,040}{363{,}66} \approx \frac{29\,040}{363},$$

$$x + y = 80\ \Omega.$$

$$y = \mathbf{60\ \Omega}.$$

2° La résistance R d'un conducteur cylindrique homogène de résistivité ρ, de longueur l et de section s est donnée par la formule

$$R = \rho \frac{l}{s}.$$

En prenant $s = \frac{\pi d^2}{4}$,

$$R = \frac{4\rho l}{\pi d^2}.$$

La résistivité ρ est connue si l'on donne la résistance R_1 d'un fil de longueur l_1 et de diamètre d_1 :

$$R_1 = \frac{4\rho l_1}{\pi d_1^2}.$$

Dans ces conditions la résistance R a pour expression

$$R = R_1 \times \frac{l}{l_1} \times \frac{d_1^2}{d^2}.$$

Nous en tirons la longueur l du fil :

$$l = l_1 \times \frac{R}{R_1} \times \frac{d^2}{d_1^2}.$$

Pour les fils de résistance x et y nous aurons des longueurs l_x et l_y.

Application numérique : $R_1 = 0{,}5\ \Omega$; $l_1 = 1$ m ou 100 cm; $d_1 = 1$ mm ou 0,1 cm; $d = 0{,}25$ mm ou 0,025 cm.

Pour $R = x = 20\ \Omega$, $l_x = 100 \times \frac{20}{0{,}5} \times \frac{0{,}025^2}{0{,}1^2}$,

$$l_x = \mathbf{250\ cm.}$$

Pour $R = y = 60\ \Omega$, $l_y = 100 \times \frac{60}{0{,}5} \times \frac{0{,}025^2}{0{,}1^2}$,

$$l_y = \mathbf{750\ cm.}$$

3° Exprimons en kilowatt-heure l'énergie électrique dépensée, W (formule 1).

1 kWh correspondant à une puissance de 1 kilowatt pendant 1 heure vaut 1 000 × 3 600 joules :

$$W = \frac{4{,}18 \times 1 \times M \times (\theta' - \theta)}{3\,600\,000}\ \text{kWh.}$$

Si f est le prix de 1 kWh, la dépense X pour la consommation d'énergie W sera

$$X = f \times \frac{4{,}18 \times 1 \times M \times (\theta' - \theta)}{3\,600\,000} \text{ F.}$$

Application numérique :

$$f = 18 \text{ F}, \quad M = 1\,000 \text{ g}, \quad \theta' - \theta = 100 - 13 = 87 \text{ °C.}$$

$$X = 18 \times \frac{4{,}18 \times 1 \times 1\,000 \times 87}{3\,600\,000} = 1{,}818 \text{ F,}$$

$$\mathbf{X = 1{,}80 \text{ F.}}$$

53. — Loi de Joule : étude d'un fusible.

On considère un fusible prévu pour une intensité normale $I_n = 10$ A constitué par un fil de diamètre $d = 0{,}4$ mm et de longueur $l = 3$ cm. On supposera la résistivité indépendante de la température et l'on prendra la valeur

$$\rho = 6 \times 10^{-8} \, \Omega\text{m.}$$

1° Calculer la résistance r du fusible.

2° Quelle est la chute de tension dans le fusible quand il est parcouru par un courant d'intensité $I_n = 10$ A ?

3° On veut mesurer expérimentalement la quantité de chaleur Q qui, fournie en un temps très court (pour éviter les pertes), porte le fusible de la température ordinaire à la température de fusion et le fait fondre. Pour cela le fusible est placé dans un calorimètre M de capacité calorifique totale $m = 100$ calories par degré. Le fusible est entouré d'une enveloppe étanche qui le laisse dans les conditions normales de fonctionnement. On fait alors passer brusquement dans le fusible un courant d'intensité $I = 10\, I_n = 100$ A. Le fusible fond très rapidement. On constate que la température s'est élevée de $\theta = 0{,}02$ °C dans le calorimètre.

a) **En déduire la valeur de Q.**

b) **Au bout de combien de temps le fusible a-t-il fondu ?**

c) **L'expérience recommencée avec une autre valeur de I donnerait-elle le même résultat pour Q ?**

4° On fait passer brusquement un courant de grande intensité, I', dans une résistance R = 1 ohm plongée dans un calorimètre M' de capacité calorifique $m' = 100$ g et dans le fusible étudié placés en série. Après la fusion rapide du fusible la température du calorimètre M' s'est élevée de $\theta' = 1{,}38$ °C.

a) **Soit Q' la chaleur dégagée dans M'. Déduire de Q', R et r la valeur de Q.**

b) **Quel est, des deux résultats trouvés pour Q, celui qui vous paraît le plus digne de confiance ? Pour quelles raisons ?**

(Rome.)

1° La résistance r d'un fil cylindrique de résistivité ρ Ωm, de longueur l m et de section s m² est donnée, en ohms, par la formule

$$r = \rho \frac{l}{s}.$$

Si la section est exprimée en fonction du diamètre d m, $s = \frac{\pi d^2}{4}$, la résistance est

$$r = \frac{4\rho l}{\pi d^2}.$$

Numériquement :

$$\rho = 6 \times 10^{-8}\ \Omega\text{m}, \quad l = 3\ \text{cm} \quad \text{ou} \quad 0{,}03\ \text{m},$$
$$d = 0{,}4\ \text{mm} \quad \text{ou} \quad 0{,}000\,4\ \text{m}.$$

$$r = \frac{4 \times 6 \times 10^{-8} \times 0{,}03}{\pi \times (0{,}000\,4)^2} = \frac{0{,}18}{4 \times 3{,}14},$$

$$\mathbf{r = 0{,}014\,3\ \Omega.}$$

2° La chute de tension, ou d.d.p., V aux bornes du fusible de résistance r, parcouru par le courant d'intensité I_n, est donnée par la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V = r I_n.$$

Numériquement : $r = 0{,}014\,3\ \Omega$, $I_n = 10$ A,

$$V = 0{,}014\,3 \times 10,$$

$$\mathbf{V = 0{,}143\ volt.}$$

3° *a*) La chaleur Q mise en jeu par le passage du courant dans le fusible sert à porter celui-ci de sa température initiale à sa température de fusion et à le fondre à cette température. Cette opération s'est effectuée dans un temps très court pendant lequel la température du calorimètre n'a pas varié.

Quand le fusible fondu s'est refroidi jusqu'à la température d'équilibre du calorimètre (température peu différente de la température initiale du fusible) il a cédé la quantité de chaleur Q au calorimètre.

La chaleur massique de l'eau étant égale à 1 calorie par gramme et par degré, l'équivalent en eau du calorimètre étant m grammes et l'élévation de sa température θ °C, la quantité de chaleur Q est donnée par l'expression

$$Q = 1 \times m \times \theta.$$

Numériquement : $m = 100$ g, $\theta = 0{,}02$ °C,

$$\mathbf{Q = 2\ calories.}$$

b) Désignons par t le temps nécessaire à la fusion. La résistance r ohms traversée par le courant I ampères dans le temps t secondes absorbe sous forme de chaleur l'énergie W joules donnée par la loi de Joule :

$$W = rI^2t.$$

Cette énergie, exprimée en calories, est, à raison de 1 calorie pour 4,18 joules,

$$Q = \frac{rI^2t}{4{,}18}.$$

Nous en tirons t.

$$t = \frac{4{,}18\,Q}{rI^2}.$$

Numériquement : $Q = 2$ cal, $r = 0{,}0143\ \Omega$, $I = 10I_n = 100$ A.

$$t = \frac{4{,}18 \times 2}{0{,}0143 \times 100^2},$$

$$t = \mathbf{0{,}0584\ s.}$$

c) L'expérience, recommencée avec une autre valeur de I, pourvu qu'elle soit effectuée dans les mêmes conditions, ne doit pas donner un résultat différent pour Q. Le résultat ne serait différent que si le courant durait un temps appréciable permettant au calorimètre de s'échauffer de θ_0 °C avant que la fusion ne soit atteinte. Dans ce cas, la chaleur fournie par le courant, $\frac{rI^2t}{4{,}18}$, serait égale à $1 \times m \times \theta_0 + Q$ au lieu d'être égale à Q.

4° Dans cette nouvelle mesure de Q le fusible r est placé dans le calorimètre M et la résistance R, en série avec le fusible, dans un deuxième calorimètre, M'. Le même courant, I', traverse ces deux résistances pendant le même temps, très court, t, nécessaire à la fusion du fusible.

a) Les quantités de chaleur Q et Q' dégagées dans les deux résistances r et R ont respectivement pour valeur

$$Q = \frac{rI'^2t}{4{,}18} \qquad (1)$$

et

$$Q' = \frac{RI'^2t}{4{,}18}. \qquad (2)$$

La première se dissipe dans le calorimètre M dont elle élève la température. La seconde sert à élever de θ' °C la température du calorimètre M' dont la valeur en eau est m' grammes. Elle a une valeur connue :

$$Q' = 1 \times m' \times \theta'.$$

Par division membre à membre, les équations (1) et (2) donnent

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{r}{R},$$

ou $$Q = Q' \frac{r}{R} = 1 \times m' \times \theta' \times \frac{r}{R}.$$

Numériquement : $m' = 100$ g, $\theta' = 1{,}38$ °C, $r = 0{,}0143\ \Omega$, $R = 1\ \Omega$.

$$Q = 1 \times 100 \times 1{,}38 \times \frac{0{,}0143}{1}.$$

Q = 1,97 calorie.

b) Bien que donnant des résultats voisins, 2 calories et 1,97 calorie, ces deux méthodes de mesure de Q ne comportent pas la même précision.

Dans la première méthode, Q est donnée par l'expression

$$Q = 1 \times m \times \theta.$$

L'erreur relative sur Q est, d'après le théorème des erreurs relatives,

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta \theta}{\theta}.$$

Si nous supposons que m est connue exactement,

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta \theta}{\theta}.$$

Dans la seconde méthode, Q est donnée par l'expression

$$Q = 1 \times m' \times \theta' \times \frac{r}{R}.$$

L'erreur relative sur Q est

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta m'}{m'} + \frac{\Delta \theta'}{\theta'} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta R}{R}.$$

Si nous supposons que m', r et R sont connues exactement

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta \theta'}{\theta'}.$$

La précision de ces deux mesures serait la même si

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = \frac{\Delta \theta'}{\theta'}.$$

Si l'on a utilisé le même thermomètre dans les deux cas, comme l'indique le texte en donnant θ et θ' en centièmes de degré Celsius, l'erreur absolue commise dans les deux mesures est la même : $\Delta\theta = \Delta\theta'$.

Mais la première mesure porte sur une élévation de température $\theta = 0{,}02\ ^{\circ}C$ tandis que la seconde porte sur $\theta' = 1{,}38\ ^{\circ}C$. Par suite

$$\frac{\Delta\theta'}{\theta'} < \frac{\Delta\theta}{\theta}.$$

C'est donc la seconde mesure qui est la meilleure.

54. — Energie électrique : étude d'un fer à repasser sous tension variable.

Un fer à repasser électrique porte sur sa plaque les indications : 300 watts-110 volts.

1° Quelle intensité de courant absorbe-t-il en régime normal ? Quelle est sa résistance ? Quel est le prix de revient d'une heure d'utilisation, l'énergie électrique coûtant 15 francs le kWh ?

2° La tension du réseau sur lequel on prend l'énergie électrique varie entre 105 et 120 volts. Exprimer en % cette variation et la variation de puissance qui en résulte pour le fer. On suppose la résistance invariable.

3° On utilise le fer à un moment où la tension du réseau reste constamment égale à 120 volts. Quelle résistance faudrait-il mettre en série avec le fer pour que la puissance transformée en chaleur dans le fer fût la même que sous la tension normale de 110 volts ?

4° Sachant que la résistance chauffante de ce fer est un ruban plat en nickel-chrome de résistivité $1{,}1 \times 10^{-6}\ \Omega m$ dont la section mesure 0,8 mm sur 0,12 mm, calculer sa longueur.

(Besançon.)

1° *Intensité du courant en régime normal.*

Les indications 300 watts-110 volts portées sur la plaque du fer signifient qu'en régime normal la puissance électrique dissipée dans le fer est 300 watts quand la d.d.p. ou tension à ses bornes est 110 volts.

Par définition, la d.d.p. V aux bornes d'une portion de circuit est le rapport $\frac{P}{I}$ de la puissance P reçue par cette portion de circuit à l'intensité I du courant qui la traverse.

La relation $V = \frac{P}{I}$ donne l'intensité si l'on connaît P et V :

$$I = \frac{P}{V}. \qquad (1)$$

Dans cette expression I est mesurée en ampères, P en watts et V en volts.

Numériquement :

$$P = 300 \text{ watts}, \qquad V = 110 \text{ volts}.$$

$$I = \frac{300}{110} = 2{,}727.$$

$$\mathbf{I = 2{,}73\ A.}$$

Résistance du fer.

Elle est donnée par la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V = RI,$$

ou, en tenant compte de la relation précédente $I = \frac{P}{V}$,

$$V = R\frac{P}{V}.$$

La résistance R s'exprime alors en fonction de la puissance et de la d.d.p. :

$$R = \frac{V^2}{P}. \qquad (2)$$

Numériquement : $V = 110$ volts, $P = 300$ watts.

$$R = \frac{110^2}{300} = \frac{121}{3},$$

$$\mathbf{R = 40{,}3\ \Omega.}$$

Prix de revient d'une heure d'utilisation.

La dépense par heure d'utilisation s'obtient en multipliant *f*, prix de l'unité d'énergie, c'est-à-dire ici le kWh, par l'énergie W dissipée en une heure et comptée en kWh.

Cette dernière est elle-même obtenue en divisant le nombre de joules dissipés par 3 600 000 joules, valeur du kWh.

L'énergie W joules dissipée dans le temps *t* secondes quand la puissance mise en jeu est P watts est

$$W = P \times t,$$

ou

$$W = \frac{P \times t}{3\,600\,000} \text{ kWh}^1.$$

---

1. Il revient au même pour calculer W en kWh d'exprimer P en kW et *t* en heures

$$W = \frac{300}{1\,000} \times 1 = 0{,}3 \text{ kWh}.$$

Par suite la dépense est

$$X = f \times W = f \times \frac{P \times t}{3\,600\,000}.$$

Numériquement :

$f = 15$ F, $P = 300$ watts, $t = 1$ heure ou 3 600 secondes

$$X = 15 \times \frac{300 \times 3\,600}{3\,600\,000} = 15 \times 0{,}3,$$

$$\mathbf{X = 4{,}5\ F.}$$

2° *Variation de tension du réseau rapportée à* 100 *volts.*

La tension normale étant V volts, si les tensions extrêmes sont V′ et V″ la variation rapportée à 100 volts est

$$\frac{\Delta V}{V} \times 100 = \frac{V'' - V'}{V} \times 100.$$

Numériquement : $V = 110$ volts, $V' = 105$ volts, $V'' = 120$ volts,

$$\frac{\Delta V}{V} \times 100 = \frac{120 - 105}{110} \times 100,$$

$$\mathbf{\frac{\Delta V}{V} \times 100 = 13{,}6\ \%}.$$

Variation de puissance dans le fer.

La résistance R étant invariable, la relation (2) donne pour le cas normal et les cas extrêmes

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{V'^2}{P'} = \frac{V''^2}{P''}.$$

Par suite

$$P' = \frac{PV'^2}{V^2} \quad \text{et} \quad P'' = \frac{PV''^2}{V^2}.$$

La variation de puissance rapportée à 100 watts est

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100 = \frac{P'' - P'}{P} \times 100 = \frac{P}{V^2}(V''^2 - V'^2) \times \frac{100}{P},$$

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100 = \frac{V''^2 - V'^2}{V^2} \times 100.$$

Numériquement : $V = 110$ volts, $V' = 105$ volts, $V'' = 120$ volts,

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100 = \frac{120^2 - 105^2}{110^2} \times 100 = 27{,}9,$$

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100 = 27{,}9\ \%.$$

3° *Utilisation du fer sous la tension maximale.*

La résistance x à mettre en série avec R quand la tension est V'' doit être telle que la puissance transformée en chaleur dans le fer ait la même valeur que lorsque la résistance R est seule sous la tension V. Cette valeur commune est évidemment $P = RI^2$. L'intensité I doit avoir la même valeur dans les deux cas.

Dans chacun de ces cas I satisfait à la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V = RI,$$
$$V'' = (R + x)\, I.$$

En éliminant I entre ces deux équations nous obtenons

$$\frac{R + x}{R} = \frac{V''}{V}$$

et
$$x = R\,\frac{V'' - V}{V}.$$

En tenant compte de la relation (2), $R = \frac{V^2}{P}$,

$$x = \frac{V}{P}\,(V'' - V).$$

Numériquement : $V = 110$ volts, $V'' = 120$ volts, $P = 300$ watts,

$$x = \frac{110}{300}\,(120 - 110) = \frac{11}{3},$$

$$x = 3{,}66\ \Omega.$$

4° *Longueur du ruban constituant la résistance chauffante.*

La résistance d'un ruban plat est la même que celle d'un fil cylindrique de même section et de même longueur :

$$R = \rho\,\frac{l}{s}.$$

Cette formule donne l :

$$(3) \qquad l = \frac{Rs}{\rho}.$$

Numériquement :

$$R = \frac{121}{3}\ \Omega, \quad s = 0{,}8 \times 0{,}12 = 0{,}096\ \text{mm}^2 \text{ ou } 96 \times 10^{-9}\ \text{m}^2,$$

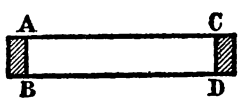
$$\rho = 1{,}1 \times 10^{-6}\ \Omega\text{m}, \quad l = \frac{121}{3} \times \frac{96 \times 10^{-9}}{1{,}1 \times 10^{-6}} = \frac{11 \times 0{,}96}{3}.$$

$$l = 3{,}52\ \text{m}.$$

55. — Energie électrique : rendement d'une ligne de transport de courant.

Une usine hydro-électrique, située en AB, est reliée au lieu d'utilisation de l'énergie électrique qu'elle produit par deux fils de cuivre, AC et BD, ayant chacun une longueur de 7,5 km et une section de 250 mm².

En régime d'utilisation normal, la puissance P, fournie par l'usine au départ AB, est 10 kilowatts, la différence de potentiel $V = V_A - V_B$ est égale à 220 volts.



α) Calculer :

1° la résistance électrique de la ligne, sachant que la résistivité du cuivre est égale à 1,54 μΩcm (1 μΩ = 10^{-6} Ω);

2° l'intensité du courant dans les fils AC et BD en régime d'utilisation normal ;

3° la puissance P′ recueillie entre les points C et D ;

4° le rendement A de la ligne $\left(A = \frac{P'}{P}\right)$.

β) Montrer qu'il y a intérêt pour améliorer le rendement à augmenter la différence de potentiel V (la puissance fournie P restant constante) et calculer la tension V à appliquer entre les points A et B pour que le rendement atteigne la valeur de 98 %.

(Montpellier.)

α) 1° La résistance r d'un fil de cuivre de longueur l, de section s et de résistivité ρ est donnée par la formule

$$r = \rho \frac{l}{s}.$$

La résistance de la ligne est

$$R = 2r = 2\rho \frac{l}{s}.$$

Numériquement : $\rho = 1{,}54\ \mu\Omega\text{cm}$ ou $1{,}54 \times 10^{-6}\ \Omega\text{cm}$,

$l = 7{,}5$ km ou $750\,000$ cm, $s = 250$ mm^2 ou $2{,}5$ cm^2,

$$R = 2 \times \frac{1{,}54}{10^6} \times \frac{750\,000}{2{,}5} = \frac{3 \times 1{,}54}{5},$$

$$\mathbf{R = 0{,}924\ \Omega.}$$

2° La différence de potentiel V aux bornes A et B est, par définition, le quotient de la puissance P fournie par l'usine au départ, c'est-à-dire dans le circuit extérieur, par l'intensité du courant débité en régime d'utilisation normal :

$$V = \frac{P}{I}.$$

Nous en tirons

$$I = \frac{P}{V}.$$

Numériquement :

$$P = 10\ \text{kW ou } 10\,000\ \text{W}, \qquad V = 220\ \text{V}.$$

$$I = \frac{10\,000}{220} = \frac{500}{11},$$

$$\mathbf{I = 45{,}45\ A.}$$

3° La puissance p dissipée sous forme de chaleur dans la ligne est donnée par la loi de Joule :

$$p = RI^2.$$

La puissance recueillie entre les points C et D est

$$P' = P - p = P - RI^2.$$

Numériquement :

$$P' = 10\,000 - 0{,}924 \times \left(\frac{500}{11}\right)^2,$$

$$\mathbf{P' = 8\,090\ W.}$$

4° Le rendement de la ligne est le rapport

$$A = \frac{P'}{P}.$$

Numériquement :

$$A = \frac{8\,090}{10\,000},$$

$$\mathbf{A = \frac{81}{100}\ \text{ou}\ 81\ \%.}$$

β) La puissance dissipée par effet Joule dans la ligne peut s'exprimer en fonction de la différence de potentiel V:

$$p = RI^2 = R\frac{P^2}{V^2}.$$

Le rendement de la ligne est

$$A = \frac{P'}{P} = \frac{P - R\dfrac{P^2}{V^2}}{P} = 1 - R\frac{P}{V^2}.$$

Pour améliorer le rendement de la ligne, il faut diminuer le terme $R\frac{P}{V^2}$. R et P étant constants, nous améliorerons le rendement en augmentant la différence de potentiel V.

Pour que le rendement atteigne n %, il faut que la tension V soit telle que

$$\frac{n}{100} = 1 - R\frac{P}{V^2}.$$

Nous en tirons

$$V = \sqrt{\frac{100\,RP}{100 - n}} = 10\sqrt{\frac{RP}{100 - n}}.$$

Numériquement : $n = 98$.

$$V = 10\sqrt{\frac{0{,}924 \times 10\,000}{100 - 98}} = 10\sqrt{4\,620,}$$

V = 680 volts.

56. — Transformation de l'énergie électrique en chaleur. Application à l'étude de la résistivité d'un métal.

Aux bornes d'un secteur à courant continu, de tension constante, égale à 120 volts, on branche un circuit comprenant :

a) un ampèremètre de résistance négligeable ;

b) un fil de fer de longueur égale à 4 mètres, de section 1/10 mm².

Le fil enroulé en solénoïde est plongé dans un calorimètre contenant de l'eau et de la glace en équilibre de température.

1° L'ampèremètre indique 30 ampères.

Quelle est à 0 °C la résistivité du fer ?

Quelle est la masse de glace qui fond chaque minute ?

2° Quand toute la glace est fondue, la température de l'eau s'élève et l'intensité du courant diminue. On note :

θ	10 °C	20 °C	32 °C	40 °C	80 °C
I	28,25 A	26,7 A	25 A	24 A	20 A

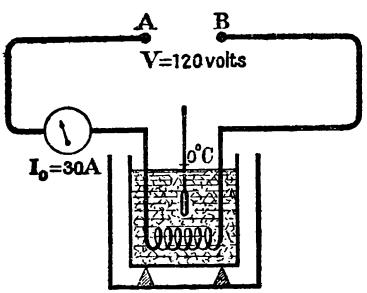
Tracer la courbe de la résistivité en fonction de la température.
Trouver la valeur du coefficient spécifique a de l'expression $\rho = \rho_0 (1 + a\theta)$.

3° Ce calorimètre contenant 1 000 g d'eau, quelle est la quantité d'électricité qui a traversé le fil pendant que la température passait de 10 °C à 20 °C ?

N.-B. — On donne : Chaleur de fusion de la glace : 80 cal/g.
Equivalent mécanique de la calorie : 4,18 joules.

(Grenoble.)

1° L'eau et la glace étant en équilibre de température le thermomètre marque la valeur constante o °C. La résistance du fil de fer a la valeur R_0, l'ampèremètre indique l'intensité I_0.



Résistivité du fer à o °C.

Elle s'obtient à partir de l'expression générale de la résistance d'un conducteur cylindrique homogène de longueur l et de section s

$$R = \rho \frac{l}{s}.$$

A o °C, $R = R_0$, $\rho = \rho_0$,

$$R_0 = \rho_0 \frac{l}{s}.$$

Nous tirons de cette expression

$$\rho_0 = R_0 \times \frac{s}{l}. \qquad (1)$$

La résistance R_0 est donnée par la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V = R_0 I_0.$$

La valeur $R_0 = \frac{V}{I_0}$ portée dans l'expression (1) donne

$$\rho_0 = \frac{V}{I_0} \times \frac{s}{l}. \qquad (2)$$

Numériquement : $V = 120$ volts, $I_0 = 30$ ampères,

$$s = 0{,}1 \text{ mm}^2 \text{ ou } 0{,}1 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \quad l = 4 \text{ m}.$$

$$\rho_0 = \frac{120}{30} \times \frac{0{,}1 \times 10^{-6}}{4}.$$

$$\rho_0 = \mathbf{0{,}1 \times 10^{-6}\ \Omega m}.$$

Masse de glace fondue en une minute.

L'énergie électrique W reçue dans le temps t par une portion de circuit parcourue pas un courant I_0, quand on établit entre ses bornes la d.d.p. V est

$$W = VI_0t.$$

Cette énergie W est exprimée en joules si la d.d.p. V est exprimée en volts, l'intensité I_0 en ampères et le temps t en secondes.

Cette énergie, dans le cas d'une résistance morte, apparaît sous forme de chaleur. Sa valeur en calories est

$$W = \frac{1}{4{,}18} VI_0t.$$

Elle sert dans le cas présent à fondre une masse de glace de m grammes. Si L est la chaleur de fusion de la glace (nombre de calories nécessaires pour fondre 1 gramme de glace à 0 °C sans changement de température), nous avons

$$\frac{1}{4{,}18} \times VI_0t = mL.$$

Cette équation donne m :

$$m = \frac{1}{4{,}18} \times \frac{VI_0t}{L}.$$

Numériquement : $V = 120$ volts, $I_0 = 30$ ampères,

$t = 1$ minute ou 60 s, $L = 80$ cal.

$$m = \frac{1}{4{,}18} \times \frac{120 \times 30 \times 60}{80} = \frac{2\,700}{4{,}18} = 645{,}9.$$

$$m = \mathbf{646\ g}.$$

2° La résistance garde la valeur constante R_0 pendant la durée de fusion de la glace. Quand cette fusion est achevée, la chaleur apportée par le courant sert à élever la température du fil de fer et celle du calorimètre. Si l'intensité du courant décroît la résistance du fil de fer augmente. Il en est de même de la résistivité, qui est donnée par l'expression

$$\rho = \frac{V}{I} \times \frac{s}{l}. \qquad (3)$$

Pour de faibles variations de température nous pouvons considérer s et l comme constantes et écrire, en divisant membre à membre (3) et (2),

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{I_0}{I},$$

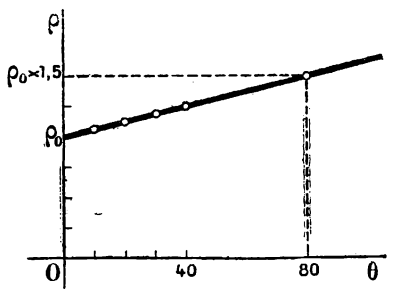
ou

$$\rho = \rho_0 \frac{I_0}{I}.$$

Nous pouvons compléter le tableau des valeurs numériques données dans le texte :

θ	0 °C	10 °C	20 °C	32 °C	40 °C	80 °C
I	30 A	28,25 A	26,7 A	25 A	24 A	20 A
ρ	ρ_0	$\rho_0 \times 1{,}06$	$\rho_0 \times 1{,}12$	$\rho_0 \times 1{,}20$	$\rho_0 \times 1{,}275$	$\rho_0 \times 1{,}5$

A l'aide de ce tableau nous construisons la courbe $\rho = f(\theta)$.



La courbe $\rho = f(\theta)$ est une droite.

La résistivité doit donc être représentée par une fonction du premier degré :

$$\rho = \rho_0 \ (1 + a\theta).$$

Le coefficient a est donné par l'expression :

$$a = \frac{\rho_{80} - \rho_0}{80\,\rho_0}.$$

Numériquement :

$$\rho_{80} = \rho_0 \times 1{,}50,$$

$$a = \frac{\rho_0 \times 1{,}50 - \rho_0}{80\,\rho_0} = \frac{0{,}50}{80};$$

$$a = \mathbf{0{,}006\,25}.$$

3° L'énergie W reçue dans le temps t par une portion de circuit parcourue par un courant I, quand on établit une d.d.p., V, constante entre ses bornes, est

$$W = VIt.$$

It est la quantité d'électricité qui a traversé cette portion de circuit. Désignons-la par Q. Nous avons

$$W = V \times Q.$$

Cette relation est valable même si l'intensité n'est pas constante.

L'énergie W apparaît ici sous forme de chaleur. Sa valeur en calories est $W = \frac{V \times Q}{4{,}18}$. Elle fait passer de θ °C à θ' °C la température de M grammes d'eau du calorimètre.

En négligeant la capacité calorifique du calorimètre devant celle de l'eau et en prenant pour chaleur massique de l'eau 1 calorie par gramme et par degré, nous avons

$$\frac{V \times Q}{4{,}18} = 1 \times M(\theta' - \theta).$$

Nous tirons de cette équation la valeur de Q :

$$Q = \frac{4{,}18 \times 1 \times M(\theta' - \theta)}{V}.$$

Numériquement : $M = 1\,000$ grammes, $\theta' = 20$ °C, $\theta = 10$ °C, $V = 120$ volts.

$$Q = \frac{4{,}18 \times 1 \times 1\,000\,(20 - 10)}{120} = \frac{4\,180}{12}.$$

Q = 348 coulombs.

CHAPITRE XV

Électrolyse. Lois de Faraday. Loi d'Ohm pour les voltamètres.

57. — Electrolyse de solutions de sels métalliques. Application des lois quantitatives de Faraday (1er énoncé).

Trois cuves à électrolyse sont placées en série sur un même circuit électrique à courant continu et contiennent respectivement des solutions aqueuses de nitrate d'argent ($AgNO_3$) pour la première, de sulfate de cuivre ($CuSO_4$) pour la seconde, de chlorure de platine ($PtCl_4$) pour la troisième.

Au bout d'une heure de fonctionnement, la masse d'argent déposée dans la première cuve est 40,2 g.

1° Quelle est l'intensité du courant qui traverse les appareils ?

2° Quelles masses de cuivre et de platine se seront déposées, en 30 minutes, dans les cuves 2 et 3 ?

Masse atomique du cuivre = 63,6 ; de l'argent = 107,9 ; du platine = 195,2, On admettra que 96 500 coulombs sont nécessaires pour libérer 107,9 g d'argent.

(Lyon.)

1° Les trois cuves à électrolyse, placées en série, sont traversées par le même courant d'intensité inconnue I. Dans chacune d'elles, le courant provoque le dépôt du métal de l'électrolyte à la cathode.

L'intensité I peut être calculée par application de la première loi de l'électrolyse :

Pour un électrolyte donné, la masse de métal déposé à la cathode est proportionnelle à la quantité d'électricité qui a traversé le voltamètre.

Appliquons cette loi à la décomposition du nitrate d'argent.

Le courant d'intensité I transporte, pendant t secondes, une quantité d'électricité It coulombs et dépose une masse d'argent m grammes à la cathode.

D'autre part nous savons que la masse d'argent connue m' grammes est déposée par une quantité d'électricité connue Q' coulombs.

Nous pouvons écrire la proportion

$$\frac{m}{m'} = \frac{It}{Q'},$$

d'où nous tirons

$$I = \frac{m}{m'} \times \frac{Q'}{t}.$$

Application numérique :

$m = 40{,}2$ g, $m' = 107{,}9$ g, $Q' = 96\,500$ coulombs,
$t = 1$ heure ou 3 600 secondes.

$$I = \frac{40{,}2}{107{,}9} \times \frac{96\,500}{3\,600} = 9{,}986 \text{ A},$$

$$\mathbf{I = 9{,}99 \text{ A} \approx 10 \text{ A}.}$$

2° Désignons par m_1, m_2 et m_3 les masses respectives d'argent, de cuivre et de platine déposées pendant le temps t_1 (30 mn) par le courant d'intensité I.

D'après la première loi de l'électrolyse, la masse de métal déposée à la cathode d'un voltamètre par un courant d'intensité donnée est proportionnelle au temps de passage du courant. La masse m_1 d'argent est donc telle que

$$\frac{m_1}{m} = \frac{t_1}{t}.$$

D'où

$$m_1 = m \times \frac{t_1}{t}.$$

Numériquement : $m = 40{,}2$ g, $t_1 = 30$ mn, $t = 1$ heure ou 60 mn.

$$m_1 = 40{,}2 \times \frac{30}{60} = 20{,}1 \text{ g}.$$

Les masses m_2 et m_3 peuvent être déduites de la deuxième loi de l'électrolyse : la masse de métal déposée à la cathode d'un voltamètre par une même quantité d'électricité est proportionnelle au quotient de la masse atomique A du métal par un nombre entier n définissant la valence électrochimique de celui-ci.

Le quotient $\frac{A}{n}$ est appelé valence-gramme du métal dans l'électrolyte.

Si nous désignons par $\frac{A_1}{n_1}$, $\frac{A_2}{n_2}$ et $\frac{A_3}{n_3}$ les valence-gramme respectives de l'argent, du cuivre et du platine, nous pouvons écrire

$$\frac{m_1}{\frac{A_1}{n_1}} = \frac{m_2}{\frac{A_2}{n_2}} = \frac{m_3}{\frac{A_3}{n_3}},$$

d'où nous tirons

$$m_2 = m_1 \times \frac{A_2}{A_1} \times \frac{n_1}{n_2}$$

et

$$m_3 = m_1 \times \frac{A_3}{A_1} \times \frac{n_1}{n_3}.$$

Application numérique :

$m_1 = 20{,}1$ g,
$A_1 = 107{,}9$, $n_1 = 1$ (valence de l'argent dans $AgNO_3$),
$A_2 = 63{,}6$, $n_2 = 2$ (valence du cuivre dans $CuSO_4$),
$A_3 = 195{,}2$, $n_3 = 4$ (valence du platine dans $PtCl_4$).

$$m_2 = 20{,}1 \times \frac{63{,}6}{107{,}9} \times \frac{1}{2}, \qquad m_2 = \mathbf{5{,}92\ g.}$$

$$m_3 = 20{,}1 \times \frac{195{,}2}{107{,}9} \times \frac{1}{4}, \qquad m_3 = \mathbf{9{,}09\ g.}$$

58. — Electrolyse de solutions de sels métalliques. Application des lois quantitatives de Faraday (2e énoncé).

Un circuit comporte une résistance R et un ensemble de trois voltamètres A, B, C, contenant respectivement du sulfate de cuivre, de l'azotate d'argent et du chlorure d'or, disposés en série.

En faisant passer un courant d'intensité constante pendant 30 minutes, on constate que la différence de potentiel aux extrémités de la résistance R est 30 volts.

L'augmentation de masse de la cathode en A (voltamètre à sulfate de cuivre) est 0,593 g.

Sachant qu'il faut 96 500 coulombs pour libérer une valence-gramme, calculer :

1° l'intensité du courant ;

2° la résistance R ;

3° l'augmentation de masse de la cathode en B (voltamètre à azotate d'argent) ;

4° l'augmentation de masse de la cathode en C (voltamètre à chlorure d'or).

On donne les masses atomiques :

Cu = 63,60 ; Ag = 108 ; Au = 196,6.

(Liban.)

La masse m de métal, de valence-gramme $\frac{A}{n}$, mise en liberté à la cathode d'un voltamètre, par une quantité d'électricité It est, d'après la loi de Faraday,

$$m = \frac{1}{\mathcal{F}} \times \frac{A}{n} \times It. \qquad (1)$$

$\mathcal{F}$ est une constante dont la signification est immédiate. Si, en effet, nous prenons $m = \frac{A}{n}$, nous avons $\mathcal{F} = It$.

La constante $\mathcal{F}$ représente la quantité d'électricité qui met en liberté une valence-gramme du métal. On lui a donné le nom de faraday. Le faraday a pour valeur, d'après l'énoncé,

$$\mathcal{F} = 96\,500 \text{ coulombs.}$$

Remarquons que la formule (1) peut se mettre sous la forme

$$\frac{m}{\frac{A}{n}} = \frac{It}{\mathcal{F}} = N.$$

N représente le nombre de faradays correspondant à It coulombs. C'est aussi le nombre de valence-gramme correspondant à m grammes de métal. D'où l'énoncé suivant, résumant les deux lois quantitatives de l'électrolyse :

pour déposer N valence-gramme de métal (ou plus généralement pour rompre N valence-gramme dans l'électrolyte) il faut une quantité d'électricité égale à N faradays.

On peut résoudre les problèmes d'électrolyse en appliquant les lois de l'électrolyse sous cette forme abrégée.

1° Désignons par A_1 la masse atomique du cuivre et par n_1 la valence de ce métal dans $CuSO_4$.

Pour déposer la masse $m_1 = 0{,}593$ g de cuivre, il faut It coulombs.

D'autre part, pour déposer 1 mole Cu ou A_1 g de cuivre il faut rompre n_1 valence-gramme, ce qui exige n_1 faradays ou $n_1\mathcal{F}$ coulombs.

Nous pouvons écrire la proportion

$$\frac{m_1}{It} = \frac{A_1}{n_1\mathcal{F}}, \qquad (2)$$

d'où nous tirons

$$I = \frac{n_1 \mathcal{F} m_1}{A_1 t}.$$

Numériquement :

$\mathcal{F} = 96\,500$ coulombs, $m_1 = 0{,}593$ g, $A_1 = 63{,}60$,

$n_1 = 2$ (valence de Cu dans $CuSO_4$), $t = 30$ mn ou 1 800 s.

$$I = \frac{2 \times 96\,500 \times 0{,}593}{63{,}60 \times 1\,800} = \frac{1\,144{,}49}{1\,144{,}8},$$

$$\mathbf{I = 1\ A.}$$

2° La d.d.p. V aux bornes de la résistance R parcourue par le courant d'intensité I est donnée par la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V = R\,I.$$

Nous en tirons

$$R = \frac{V}{I}.$$

Numériquement : $V = 30$ volts, $I = 1$ A.

$$\mathbf{R = 30\ \Omega.}$$

3° Désignons par A_2 la masse atomique de l'argent et par n_2 sa valence.

Pour déposer la masse m_2 d'argent, il faut It coulombs. Pour déposer 1 mole Ag ou A_2g d'argent, il faut rompre n_2 valence-gramme, ce qui exige n_2 faradays. Nous pouvons écrire la proportion

$$\frac{m_2}{It} = \frac{A_2}{n_2 \mathcal{F}}. \qquad (3)$$

La comparaison de (2) et (3) donne immédiatement

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{A_2}{n_2} : \frac{A_1}{n_1},$$

$$m_2 = m_1 \times \frac{A_2}{n_2} \times \frac{n_1}{A_1}.$$

Numériquement : $A_2 = 108$, $n_2 = 1$ (valence de Ag dans $AgNO_3$).

$$m_2 = 0{,}593 \times \frac{108}{1} \times \frac{2}{63{,}60}, \qquad \mathbf{m_2 = 2{,}01\ g.}$$

4° Désignons par A_3 la masse atomique de l'or et par n_3 sa valence.

Le même raisonnement permet d'écrire

$$\frac{m_3}{It} = \frac{A_3}{n_3 \mathcal{F}}$$

et

$$m_3 = m_1 \times \frac{A_3}{n_3} \times \frac{n_1}{A_1}.$$

Numériquement : $A_3 = 196{,}6$, $n_3 = 3$ (valence de Au dans $AuCl_3$).

$$m_3 = 0{,}593 \times \frac{196{,}6}{3} \times \frac{2}{63{,}60}, \qquad \mathbf{m_3 = 1{,}22\ g.}$$

59. — Étude d'un voltamètre contenant une solution de sulfate de sodium. Loi d'Ohm pour ce voltamètre.

On électrolyse une solution de sulfate de sodium dans un tube en U de diamètre $d = 20$ mm et tel que la longueur totale entre les électrodes soit $l = 30$ cm. En élevant progressivement la différence de potentiel entre ces électrodes à partir de zéro, on constate que l'électrolyse commence lorsque cette différence de potentiel atteint la valeur 1,7 V. On continue à élever cette tension jusqu'à la valeur 12 V et il passe alors un courant de 53,7 milliampères.

1° Quelles sont la résistance de la colonne liquide et la résistivité de l'électrolyte? Les valeurs ainsi obtenues peuvent-elles être très exactes?

2° Décrire les phénomènes observés au voisinage des électrodes.

3° Pendant combien de temps faut-il faire passer le courant pour recueillir à la cathode 100 cm³ de gaz ?

4° Quelle serait la dépense pour recueillir, comme ci-dessus, un litre de gaz, sachant que le prix du kilowatt-heure est 0,175 F? On sait que 1 g d'hydrogène occupe 11,22 l dans les conditions de l'expérience.

(Alger.)

1° Le voltamètre contenant une solution de sulfate de sodium et ayant des électrodes inattaquables (charbon ou platine) est un récepteur de force contre-électromotrice E′ et de résistance R. Lorsqu'il est traversé par un courant d'intensité I, la d.d.p. V entre ses électrodes est donnée par la loi d'Ohm pour un récepteur :

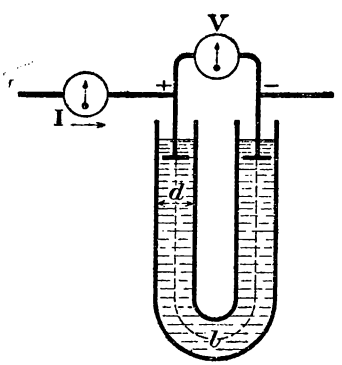
$$V = RI + E'. \qquad (1)$$

L'électrolyse n'est visible, c'est-à-dire que les transformations chimiques ne sont apparentes, que si la d.d.p. V est supérieure à une d.d.p. déterminée, V_0, égale à la force contre-électromotrice E′ du voltamètre. Nous devons avoir

$$V > V_0$$

et

$$V_0 = E'.$$



La relation (1) donne alors la valeur de R si, la condition $V > V_0$ étant réalisée, nous connaissons V, V_0 et I :

$$R = \frac{V - E'}{I},$$

$$R = \frac{V - V_0}{I}.$$

Numériquement :

$V = 12$ volts, $V_0 = 1{,}7$ volt, $I = 53{,}7$ mA ou $0{,}053\,7$ A.

$$R = \frac{12 - 1{,}7}{0{,}053\,7} = 191{,}8.$$

$$\mathbf{R = 192\ \Omega.}$$

Si nous assimilons le voltamètre à un conducteur homogène cylindrique de longueur l et de section $s = \pi \frac{d^2}{4}$, la résistivité, ρ, de l'électrolyte se déduit de l'expression de la résistance

$$R = \rho \times \frac{l}{s} = \frac{4\rho l}{\pi d^2},$$

qui donne

$$\rho = R \frac{\pi d^2}{4l}.$$

Numériquement : $R = 192\ \Omega$, $d = 20$ mm ou $0{,}02$ m, $l = 30$ cm ou $0{,}30$ m.

$$\rho = \frac{192 \times \pi \times (0{,}02)^2}{4 \times 0{,}3} = 0{,}064\pi = 0{,}200\,96,$$

$$\mathbf{\rho = 0{,}201\ \Omega m.}$$

Les deux valeurs de R et ρ ainsi calculées ne peuvent pas être très exactes parce que la valeur V_0 n'est pas rigoureusement égale à E' (pour $V = V_0$ l'intensité n'est pas nulle puisqu'il y a électrolyse invisible) et que l'assimilation de l'électrolyte à un conducteur cylindrique ne correspond pas tout à fait à la réalité.

2° L'électrolyse du sulfate de sodium entre électrodes inattaquables n'est pas une électrolyse simple.

Les ions SO_4^{--} arrivant sur l'anode perdent leur charge électrique et les radicaux SO_4 réagissent sur l'eau :

$$SO_4 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + \frac{1}{2} \nearrow O_2.$$

Les ions Na^+ arrivant sur la cathode perdent leur charge électrique; les atomes neutres Na réagissent sur l'eau :

$$2\,Na + 2\,H_2O \rightarrow 2\,NaOH + \nearrow H_2.$$

Ainsi nous observons : sur l'anode un dégagement gazeux d'oxygène tandis que l'électrolyte à son voisinage est rendu acide par la formation d'acide sulfurique, qui d'ailleurs s'ionise à son tour ;

sur la cathode un dégagement d'hydrogène (volume double de celui d'oxygène) tandis que l'électrolyte à son voisinage est rendu alcalin par la formation de soude, qui s'ionise à son tour.

Si nous faisons le bilan énergétique de cette électrolyse nous voyons qu'il y a disparition d'une molécule Na_2SO_4 et de trois molécules d'eau tandis qu'il se forme une molécule H_2SO_4, deux molécules Na(OH), une demi-molécule O_2 et une molécule H_2.

L'énergie totale mise en jeu dans la décomposition et la formation de ces corps n'est pas nulle : le voltamètre a une force contre-électromotrice.

3° Désignons par t le temps en secondes nécessaire pour recueillir à la cathode un volume v cm³ de gaz, l'intensité étant I.

Le gaz dégagé à la cathode est l'hydrogène provenant de la réaction du sodium sur l'eau. Pour 1 mole H nous avons mis en jeu 1 mole Na et par suite 1 faraday ou $\mathcal{F}$ coulombs.

Le nombre de moles H obtenues avec It coulombs $\frac{v}{11\,200}$, est égal au nombre de faradays utilisés.

$$\frac{v}{11\,200} = \frac{It}{\mathcal{F}}.$$

Cette relation donne t, connaissant v, I et $\mathcal{F}$:

$$t = \frac{\mathcal{F} \times v}{11\,200 \times I}.$$

Application numérique :

$\mathcal{F} = 96\,500$ coulombs, $v = 100$ cm³, $I = 0{,}053\,7$ ampère.

$$t = \frac{96\,500 \times 100}{11\,200 \times 0{,}053\,7} = 16\,044 \text{ s.} \qquad t = \mathbf{4\ h\ 27\ mn.}$$

4° Pour recueillir v cm³ de gaz il faut utiliser un courant de I ampères pendant t secondes sous une d.d.p. V volts.

L'énergie électrique correspondante est VIt joules ou

$$\frac{VIt}{3\,600\,000} \text{ kWh.}$$

Pour un volume v' cm³, nous devrons dépenser une énergie

$$W = \frac{VIt \times v'}{3\,600\,000 \times v} \text{ kWh.}$$

Par suite si f est la dépense pour 1 kWh, la dépense pour W kWh sera

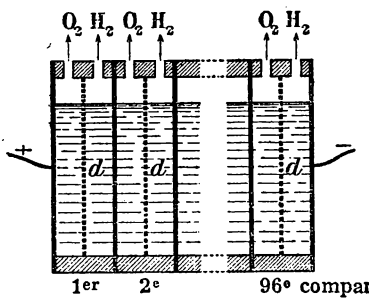
$$D = f \times \frac{VIt \times v'}{3\,600\,000 \times v}.$$

Application numérique :

$$f = 0{,}175 \text{ F}, \quad V = 12 \text{ volts}, \quad I = 0{,}053\,7 \text{ A}, \quad t = 16\,044 \text{ s},$$
$$v = 100 \text{ cm}^3, \quad v' = 1 \text{ l ou } 1\,000 \text{ cm}^3.$$
$$D = 0{,}175 \times \frac{12 \times 0{,}053\,7 \times 16\,044 \times 1\,000}{3\,600\,000 \times 100}.$$
$$\mathbf{D = 0{,}005 \text{ F}.}$$

60. — Préparation industrielle de l'oxygène et de l'hydrogène par électrolyse d'une solution de soude. Rendement de cette préparation.

Un appareil d'électrolyse, pour la production d'hydrogène et d'oxygène, se compose de 96 compartiments contenant une solution alcaline. Chaque compartiment est divisé en deux parties par un diaphragme poreux, *d*, qui laisse passer le



courant et permet de recueillir l'hydrogène et l'oxygène séparément. Les compartiments sont en fonte, sauf les parties hachurées, qui sont constituées par une substance isolante. Ces compartiments sont groupés en série comme l'indique la figure.

Entre les deux parois extrêmes de l'appareil on établit une différence de potentiel de 220 volts. Un courant de 105 ampères traverse l'appareil. On recueille par heure 342,9 g d'hydrogène ; 2 743 g d'oxygène.

Calculer ;

1° les masses d'hydrogène et d'oxygène *effectivement* recueillies en une heure : par ampère d'une part, par watt d'autre part ;

2° les masses des deux gaz qu'on devrait obtenir *théoriquement* par ampère, dans le même temps ;

3° les masses des deux gaz qu'on devrait obtenir *théoriquement* par watt, dans le même temps ;

4° Quelles conclusions peut-on tirer de la comparaison des résultats précédents quant à l'utilisation du courant et de l'énergie électrique ?

On rappelle qu'un ampère dépose par seconde 1,118 mg d'argent.

Le passage du courant dans chaque compartiment exige *théoriquement* 1,23 volt.

Les masses atomiques sont H = 1, O = 16, Ag = 108 et les valences correspondantes 1, 2, 1.

(Strasbourg.)

Dans chaque compartiment ou cellule électrolytique, l'alcali Na(OH) est ionisé : les ions Na^+ et OH^- servent de véhicule au courant.

Les ions Na^+ arrivant sur la cathode perdent leur charge électrique.

Les atomes neutres Na réagissent sur l'eau :

$$2\,Na + 2\,H_2O \rightarrow 2\,Na(OH) + \nearrow H_2.$$

A la cathode 2 molécules d'alcali se reconstituent aux dépens de 2 molécules d'eau (puis s'ionisent de nouveau) et l'hydrogène gazeux se dégage.

Les ions OH^- arrivant sur l'anode perdent leur charge électrique et les radicaux OH réagissent entre eux :

$$2\,OH \rightarrow H_2O + \frac{1}{2} \nearrow O_2.$$

A l'anode une molécule d'eau se reconstitue et l'oxygène gazeux se dégage.

En définitive, dans chaque cellule, grâce au jeu des deux réactions secondaires, on observe la décomposition d'une molécule d'eau pour deux molécules d'alcali mises en jeu.

1° Désignons par m_1 et m_2 les masses d'hydrogène et d'oxygène effectivement recueillies dans l'ensemble des cellules quand un courant I ampères les traverse pendant 1 heure.

Les masses d'hydrogène et d'oxygène effectivement recueillies en une heure et par ampère seront respectivement

$$\frac{m_1}{I} \quad \text{et} \quad \frac{m_2}{I}.$$

Numériquement : $m_1 = 342{,}9$ g, $m_2 = 2743$ g, $I = 105$ A.

$$\frac{m_1}{I} = \frac{342{,}9}{105}, \qquad \frac{m_1}{I} = \mathbf{3{,}266\ g.\ A^{-1}}.$$

$$\frac{m_2}{I} = \frac{2\,743}{105}, \qquad \frac{m_2}{I} = \mathbf{26{,}12\ g.\ A^{-1}}.$$

Pour obtenir m_1 g d'hydrogène et m_2 g d'oxygène il a fallu faire passer un courant de I ampères sous V volts pendant 1 heure. La puissance utilisée étant $W = VI$ watts, les masses d'hydrogène et d'oxygène effectivement recueillies en une heure et par watt seront respectivement :

$$\frac{m_1}{W} = \frac{m_1}{VI}$$

et

$$\frac{m_2}{W} = \frac{m_2}{VI}.$$

Numériquement : V = 220 volts, I = 105 ampères,

$$\frac{m_1}{W} = \frac{342{,}9}{220 \times 105} = \frac{342{,}9}{23\,100}, \qquad \frac{m_1}{W} = \mathbf{0{,}014\,84\ g.\ W^{-1}}.$$

$$\frac{m_2}{W} = \frac{2\,743}{220 \times 105} = \frac{2\,743}{23\,100}, \qquad \frac{m_2}{W} = \mathbf{0{,}1187\ g.\ W^{-1}}.$$

2° Théoriquement la décomposition d'une mole H_2O provient de l'électrolyse de deux moles Na OH.

Pour mettre en liberté dans chaque cellule 2 moles H soit 2 g d'hydrogène et 1 mole O, soit 16 g d'oxygène, il faut donc la même quantité d'électricité que pour mettre en liberté 2 moles Na c'est-à-dire 2 faradays ou 2 $\mathcal{F}$ coulombs.

$\mathcal{F}$ est déterminé d'après le texte à partir de la définition de l'ampère électrochimique.

1 faraday dépose 1 valence-gramme d'argent, soit $\frac{108}{1}$ g d'argent,

1 ampère pendant 1 seconde (ou 1 coulomb) dépose 1,118 mg ou 0,001 118 g d'argent. Donc pour avoir 108 g d'argent il faudra

$$\mathcal{F} = \frac{1 \times 108}{0{,}001\,118} \text{ coulombs.}$$

Une quantité d'électricité It coulombs met en liberté dans chaque cellule $\frac{2 \times It}{2\mathcal{F}}$ g d'hydrogène et $\frac{16 \times It}{2\mathcal{F}}$ g d'oxygène ; et dans les N cellules en série, qui sont traversées par le même courant,

$$N \times \frac{2 \times It}{2\mathcal{F}} \text{ g d'hydrogène et } N \times \frac{16 \times It}{2\mathcal{F}} \text{ g d'oxygène.}$$

Les masses d'hydrogène et d'oxygène obtenues théoriquement en une heure et pour I ampères seront

$$m'_1 = N \times \frac{2 \times I \times 3\,600}{2\mathcal{F}} \text{ g} \quad \text{et} \quad m'_2 = N \times \frac{16 \times I \times 3\,600}{2\mathcal{F}} \text{ g}$$

et en une heure et par ampère

$$\frac{m'_1}{I} = N \times \frac{2 \times 3\,600}{2\mathcal{F}} \text{ g. A}^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{m'_2}{I} = N \times \frac{16 \times 3\,600}{2\mathcal{F}} \text{ g. A}^{-1}.$$

Numériquement : $N = 96$, $\mathcal{F} = \dfrac{108}{0{,}001\,118}$ coulombs.

$$\frac{m'_1}{I} = 96 \times \frac{2 \times 3\,600 \times 0{,}001\,118}{2 \times 108} = 3{,}577\,6, \qquad \frac{m'_1}{I} = \mathbf{3{,}578\ g.}$$

$$\frac{m'_2}{I} = 96 \times \frac{16 \times 3\,600 \times 0{,}001\,118}{2 \times 108} = 28{,}620\,8, \qquad \frac{m'_2}{I} = \mathbf{28{,}62\ g.}$$

3° Pour obtenir m'_1 g d'hydrogène et m'_2 g d'oxygène il a fallu faire passer un courant de I ampères sous une d.d.p. théorique $V' = Nv$ pendant 1 heure (v étant la d.d. p. théorique aux bornes de chaque cellule).

La puissance théoriquement nécessaire est donc $W' = Nv \times I$ watts.

Par suite les masses d'hydrogène et d'oxygène qu'on devrait théoriquement obtenir en 1 heure et par watt seraient respectivement :

$$\frac{m'_1}{W'} = N \times \frac{2 \times I \times 3\,600}{2\mathcal{F}} \times \frac{1}{Nv \times I} = \frac{2 \times 3\,600}{2\mathcal{F} \times v}$$

et

$$\frac{m'_2}{W'} = N \times \frac{16 \times I \times 3\,600}{2\mathcal{F}} \times \frac{1}{Nv \times I} = \frac{16 \times 3\,600}{2\mathcal{F} \times v}.$$

Numériquement : $v = 1{,}23$ volt, $\mathcal{F} = \dfrac{108}{0{,}001\,118}$ coulombs.

$$\frac{m'_1}{W'} = \frac{2 \times 3\,600 \times 0{,}001\,118}{2 \times 108 \times 1{,}23}, \qquad \frac{m'_1}{W'} = \mathbf{0{,}030\,29\ g.}$$

$$\frac{m'_2}{W'} = \frac{16 \times 3\,600 \times 0{,}001\,118}{2 \times 108 \times 1{,}23}, \qquad \frac{m'_2}{W'} = \mathbf{0{,}242\,32\ g.}$$

4° Si nous comparons les masses effectives et théoriques de gaz obtenues en une heure et par ampère nous trouvons :

pour l'hydrogène 3,266 g et 3,578 g,
pour l'oxygène 26,12 g et 28,62 g.

De même si nous comparons les masses effectives et théoriques de gaz obtenues en une heure et par watt nous trouvons :

pour l'hydrogène 0,014 84 g et 0,030 29 g,
pour l'oxygène 0,118 7 g et 0,242 3 g.

Les rapports $K_H = \dfrac{3{,}266}{3{,}578}$ et $K_O = \dfrac{26{,}12}{28{,}62}$

caractérisent le rendement de l'électrolyse, si nous considérons la quantité d'électricité mise en jeu. Il est voisin de l'unité pour les deux gaz.

Les rapports $K'_H = \frac{0{,}014\,84}{0{,}030\,29}$ et $K'_O = \frac{0{,}118\,7}{0{,}242\,3}$

caractérisent le rendement de l'électrolyse, si nous considérons l'énergie mise en jeu.

La faiblesse de ces deux derniers rapports tient au fait que la d.d.p. effective, V = 220 volts, se répartit en d.d.p. ohmique, RI, et d.d.p. théorique, Nv, correspondant à la force contre-électromotrice des cellules :

$$V = RI + Nv.$$

La puissance effective est

$$VI = RI^2 + NvI.$$

Une partie de cette puissance, RI^2, ne joue aucun rôle au point de vue chimique : elle est dissipée par effet Joule. Il y a intérêt à la rendre aussi petite que possible. On y arrivera en augmentant la surface des électrodes et la concentration de l'électrolyte de telle sorte que la résistance de l'appareil soit aussi faible que possible.

61. — Préparation de l'aluminium par électrolyse. Energie mise en jeu sous ses diverses formes.

On veut préparer de l'aluminium par électrolyse d'un mélange d'alumine et de cryolithe dans une cuve fonctionnant sous 8 volts et consommant 8 000 ampères.

1° Calculer la masse d'aluminium obtenue en moyenne à l'heure.

2° Sachant que la force contre-électromotrice de la cuve est 2,8 volts calculer sa résistance intérieure.

3° Quelle puissance la cuve utilise-t-elle

***a*) sous forme calorifique ?**

***b*) sous forme chimique ?**

4° Déterminer en joules l'énergie chimique nécessaire pour mettre en liberté 1 g d'aluminium.

On donne Al = 27 (en grammes).

On rappelle qu'il faut 96 500 coulombs pour libérer 1 g d'hydrogène.

(Alger.)

L'aluminium se prépare par électrolyse d'un mélange d'alumine, Al_2O_3, et de cryolithe, Na_3AlF_6.

La théorie de cette électrolyse est confuse et controversée.

Il est généralement admis que la cryolithe par sa décomposition en 3NaF et AlF_6 et par l'ionisation de NaF assure le passage du courant ; que des réactions secondaires ioniques produisent au voisinage de la cathode des ions Al^{+++} aux dépens de AlF_6 et au voisinage de l'anode des ions O^{--} aux dépens de Al_2O_3. Ces ions se déchargent sur les électrodes et donnent Al métallique et O_2 gazeux, qui brûle le charbon de l'anode.

La cryolithe est entièrement régénérée ; seule l'alumine disparaît.

1° La production de 2 moles Al résulte de la décomposition de 1 mole Al_2O_3, donc de la rupture de 6 valence-gramme. La quantité d'électricité nécessaire pour obtenir ces 2 moles Al (2 × 27 g) est donc (loi de Faraday 2e énoncé) de 6 faradays ou 6 $\mathcal{F}$ coulombs.

La quantité d'électricité It coulombs donnera une masse m d'aluminium telle que

$$m = \frac{2 \times 27 \times It}{6\mathcal{F}}.$$

La valeur de $\mathcal{F}$ est donnée par le texte : pour libérer 1 g d'hydrogène c'est-à-dire une valence-gramme (H a pour masse atomique 1 et pour valence 1) il faut $\mathcal{F} = 96\,500$ coulombs.

Numériquement :

$I = 8\,000$ ampères, $t = 1$ heure, ou $3\,600$ s, $\mathcal{F} = 96\,500$ coulombs

$$m = \frac{2 \times 27 \times 8\,000 \times 3\,600}{6 \times 96\,500}.$$

$$m = \mathbf{2\,686\ g.}$$

2° La cuve à électrolyse est un récepteur de résistance R et de force contre-électromotrice E′. Elle est traversée par un courant I quand la d.d.p. à ses bornes est V. La loi d'Ohm appliquée à ce récepteur,

$$V = RI + E',$$

donne R :

$$R = \frac{V - E'}{I}.$$

Numériquement : $V = 8$ volts, $E' = 2{,}8$ volts, $I = 8\,000$ ampères

$$R = \frac{8 - 2{,}8}{8\,000}.$$

$$\mathbf{R = 0{,}000\,65\ \Omega.}$$

3° *a*) La puissance utilisée par la cuve sous forme calorifique, P, est donnée par la loi de Joule :

$$P = RI^2.$$

Numériquement : $R = 0{,}000\,65\ \Omega$, $I = 8\,000$ ampères.

$$P = 0{,}000\,65 \times 8\,000^2 = 650 \times 64 = 41\,600 \text{ watts.}$$

$$\mathbf{P = 41{,}6\ kW.}$$

b) La puissance utilisée par la cuve sous forme chimique, P′, résulte de la définition de la force contre-électromotrice E′ d'un récepteur : rapport de la puissance qui apparaît sous forme différente de la puissance calorifique, à l'intensité du courant qui traverse le récepteur :

$$E' = \frac{P'}{I}.$$

Cette formule donne P′.

$$P' = E'I.$$

Numériquement : $E' = 2{,}8$ volts, $I = 8\,000$ ampères.

$$P' = 2{,}8 \times 8\,000 = 22\,400 \text{ watts.}$$

$$\mathbf{P' = 22{,}4\ kW.}$$

Vérification : nous devons avoir

$$VI = RI^2 + E'I = P + P'.$$

$$VI = 8 \times 8\,000 = 64\,000 \text{ watts,}$$
$$P + P' = 41\,600 + 22\,400 = 64\,000 \text{ watts.}$$

La puissance calorifique est, dans le cas présent, très importante. C'est grâce à elle que le bain de cryolithe tenant en solution l'alumine peut rester fondu.

4° Pour obtenir m grammes d'aluminium il a fallu utiliser un courant de I ampères pendant t secondes.

L'énergie chimique mise en jeu pendant ce temps est

$$W' = P' \times t = E'It.$$

Par suite, pour mettre en liberté 1 g d'aluminium, l'énergie chimique nécessaire sera

$$\frac{W'}{m} = \frac{E'It}{m}.$$

Numériquement :

$E' = 2{,}8$ volts, $I = 8\,000$ ampères, $t = 1$ h ou $3\,600$ s, $m = 2\,686$ g.

$$\frac{W'}{m} = \frac{2{,}8 \times 8\,000 \times 3\,600}{2\,686} = 30\,022 \text{ joules.}$$

$$\frac{W'}{m} = \mathbf{30{,}0\ kJ.}$$

REMARQUE. — Nous aurions pu obtenir le même résultat d'une autre façon : pour 2 moles Al ou 2×27 grammes Al, il faut $6\,\mathcal{F}$ coulombs, donc, une énergie chimique $E' \times 6\,\mathcal{F}$ joules ; pour 1 gramme d'aluminium il faudra $\frac{E' \times 6\,\mathcal{F}}{2 \times 27}$ joules,

soit $$\frac{2{,}8 \times 6 \times 96\,500}{2 \times 27} = 30\,022 \text{ joules.}$$

CHAPITRE XVI

Loi d'Ohm pour les moteurs.

62. — Expression des caractéristiques d'un moteur en fonction de la vitesse du rotor.

La résistance entre les bornes d'un moteur électrique est $r = 1$ ohm. On les réunit par un fil de résistance 3 ohms à deux points dont on maintient constante et égale à 600 volts la différence de potentiel. La force contre-électromotrice est proportionnelle au nombre de tours par minute. Le moteur tournant à vide fait 1 500 tours par minute. (On négligera tous les frottements.) Désignant par n le nombre de tours que fait le moteur par minute, on exprimera en fonction de n :

1° la force contre-électromotrice du moteur ;

2° l'intensité du courant dans le circuit ;

3° la différence de potentiel aux bornes du moteur ;

4° sa puissance ;

5° son rendement (rapport de la puissance du moteur à la puissance fournie par le générateur).

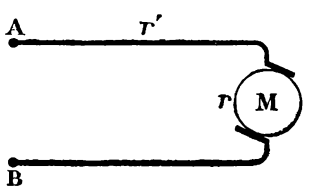
6° Déterminer la puissance maximale du moteur ainsi que son rendement et sa vitesse de rotation dans ce cas particulier de puissance maximale.

7° Calculer aussi dans ce cas la quantité de chaleur dégagée pendant une heure dans le moteur.

On sait que J = 4,18 joules.

(Montpellier.)

1° Nous supposons que les bornes du moteur M de résistance r sont réunies par un fil de résistance r' à deux points A et B dont on maintient constante et égale à V la différence de potentiel.



Lorsque le moteur marche en régime normal, il est parcouru par un courant d'intensité I. La puissance totale VI fournie par le générateur dans le circuit AMB est la somme de deux termes :

a) le terme $(r + r')I^2$ qui représente la puissance dissipée sous forme de chaleur ;

b) le terme P′ représentant la puissance mécanique développée par le moteur.

Si nous désignons par E' la force contre-électromotrice du moteur, nous avons

$$P' = E'I,$$

et nous pouvons écrire l'égalité

$$VI = (r + r')\,I^2 + E'I. \qquad (1)$$

En divisant tous les termes par I, nous obtenons l'expression de la loi d'Ohm pour une portion de circuit contenant un récepteur :

$$V = (r + r')\,I + E'. \qquad (2)$$

La force contre-électromotrice E' est proportionnelle au nombre n de tours par minute du moteur. Nous pouvons poser

$$E' = kn, \qquad (3)$$

k étant une constante.

Lorsque le moteur tourne à vide, la puissance mécanique qu'il développe, $P' = E'I$, est nulle. Mais le moteur, tournant à raison de n_0 tours par minute, a une force contre-électromotrice $E'_0 = kn_0$.

Il en résulte que l'intensité I qui le traverse est nulle : $I = 0$. L'équation (2) devient

$$V = E'_0$$

ou

$$V = kn_0. \qquad (4)$$

En faisant le rapport des relations (3) et (4) nous obtenons

$$\frac{E'}{V} = \frac{n}{n_0},$$

d'où

$$E' = \frac{V}{n_0}\,n.$$

Numériquement : $n_0 = 1\,500$ tr/mn, $V = 600$ volts,

$$E' = \frac{600}{1\,500}\,n,$$

$$\mathbf{E' = 0{,}4\,n \text{ volts.}}$$

2° L'intensité du courant est donnée par la loi d'Ohm :

$$V = (r + r')\ I + E'. \qquad (2)$$

Nous en tirons

$$I = \frac{V - E'}{r + r'}.$$

Numériquement :

$$r = 1\ \Omega, \quad r' = 3\ \Omega.$$

$$I = \frac{600 - 0{,}4\,n}{4}.$$

$$\mathbf{I = 150 - 0{,}1\,n\ ampères.}$$

3° La différence de potentiel V′ aux bornes du moteur est donnée par la loi d'Ohm pour un récepteur :

$$V' = rI + E'.$$

Numériquement : $r = 1\,\Omega$, $I = 150 - 0{,}1\,n$, $E' = 0{,}4\,n$ volts.

$$V' = 150 - 0{,}1\,n + 0{,}4\,n.$$

$$\mathbf{V' = 150 + 0{,}3\,n\ volts.}$$

4° La puissance du moteur est donnée par la relation

$$P' = E'I.$$

Numériquement :

$$P' = 0{,}4\,n \times (150 - 0{,}1\,n).$$

$$\mathbf{P' = 60\,n - 0{,}04\,n^2\ watts.}$$

5° Le rendement A du moteur est, par définition,

$$A = \frac{E'I}{VI} = \frac{E'}{V}.$$

Numériquement : $E' = 0{,}4\,n$ volts, $V = 600$ volts.

$$A = \frac{0{,}4\,n}{600}.$$

$$\mathbf{A = \frac{n}{1\,500}.}$$

6° La puissance $P' = 60\,n - 0{,}04\,n^2$ est représentée par un trinôme du second degré dont le terme constant est nul. Ce trinôme est maximal lorsque

$$n_m = \frac{60}{2 \times 0{,}04},$$

ou

$$n_m = 750\ \text{tr/mn},$$

n_m étant la vitesse de rotation correspondant à la puissance maximale.

Cette puissance maximale est donc

$$P'_m = 60\, n_m - 0{,}04\, n_m^2.$$

$$P'_m = 60 \times 750 - 0{,}04 \times 750^2.$$

$$\mathbf{P'_m = 22\,500 \text{ watts.}}$$

Le rendement du moteur est, dans ce cas,

$$A_m = \frac{n_m}{1\,500} = \frac{750}{1\,500}.$$

$$A_m = \frac{1}{2}.$$

7° Lorsque le moteur a sa puissance maximale, il est parcouru par un courant d'intensité

$$I_m = 150 - 0{,}1\, n_m,$$

ou

$$I_m = 150 - 75 = 75\,\text{A}.$$

La quantité de chaleur dégagée dans le moteur pendant le temps t est donnée par la loi de Joule :

$$Q = \frac{1}{4{,}18}\, r I_m^2 t.$$

Numériquement : $r = 1\ \Omega$, $I_m = 75$ A, $t = 1$ heure ou 3 600 secondes.

$$Q = \frac{1}{4{,}18} \times 1 \times 75^2 \times 3\,600 = 4\,844 \times 10^3 \text{ cal.}$$

$$\mathbf{Q = 4844 \text{ kcal.}}$$

63. — Étude d'un moteur dont le rotor est successivement bloqué puis libre.

1° On a réuni les deux pôles d'une prise de courant, présentant une différence de potentiel constante égale à 120 volts, par un circuit comportant une résistance, un moteur électrique et un ampèremètre disposés en série. La résistance électrique de l'ensemble est 20 ohms. Le moteur étant muni d'un frein fortement serré qui empêche le rotor de tourner, quelle est l'indication de l'ampèremètre ?

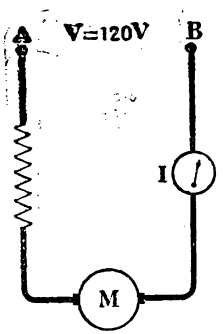
2° On desserre progressivement le frein ; le rotor prend un mouvement de plus en plus rapide. On voit, en même temps, l'indication de l'ampèremètre diminuer. Quelle est l'explication de ce fait ?

3° Représenter par un graphique la variation de la puissance du moteur en fonction de l'intensité du courant.

4° Calculer l'intensité du courant et la force contre-électromotrice du moteur lorsque la puissance de celui-ci est 55 watts.

(Poitiers.)

1° Le frein étant fortement serré, le rotor ne tourne pas : le moteur ne fournit aucun travail mécanique. Il se comporte dans ce cas comme une résistance morte s'ajoutant aux autres résistances mortes du circuit. Soit R la résistance de l'ensemble. La loi d'Ohm pour un circuit ne comprenant que des résistances mortes s'écrit



$$V = RI. \qquad (1)$$

Cette relation donne l'intensité cherchée I :

$$I = \frac{V}{R}.$$

Numériquement : V = 120 volts, R = 20 Ω.

$$I = \frac{120}{20}.$$

$$\mathbf{I = 6\ A.}$$

2° L'explication du fait que l'intensité marquée par l'ampèremètre diminue quand on desserre progressivement le frein est donnée par la loi d'Ohm.

Le frein étant légèrement desserré exerce sur l'arbre du moteur une force de frottement bien déterminée : le moteur fournit donc une puissance mécanique, P', tandis que l'intensité prend la valeur i. Le moteur est alors un récepteur possédant une force contre-électromotrice

$$E' = \frac{P'}{i}.$$

La loi d'Ohm appliquée à une portion de circuit comprenant des résistances mortes et un récepteur a pour expression

$$V = Ri + E'.$$

Nous en tirons

$$i = \frac{V - E'}{R}.$$

L'intensité primitive (rotor bloqué) étant $I = \frac{V}{R}$, il en résulte

$$i < I.$$

L'intensité diminue quand on desserre le frein.

3° La loi d'Ohm

$$V = Ri + E'$$

peut encore s'écrire

$$V = Ri + \frac{P'}{i}.$$

Nous en tirons

$$P' = Vi - Ri^2. \qquad (2)$$

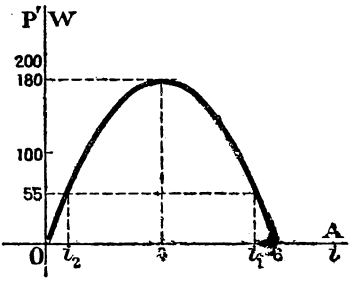
P' est une fonction du second degré de l'intensité : la courbe représentative est une parabole.

Explicitons cette fonction : V = 120 volts, R = 20 Ω.

$$P' = 120\,i - 20\,i^2.$$

$P' = 0$ pour $i = 0$

et $i = \frac{V}{R} = I = 6$ A.



P' est maximale pour

$$i = \frac{I}{2} = \frac{V}{2R} = 3 \text{ A}.$$

Sa valeur maximale est

$$P'_m = \frac{V^2}{4R} = \frac{120^2}{4 \times 20} = 180 \text{ watts}.$$

4° Si la puissance P' du moteur est donnée, l'intensité du courant peut se calculer à partir de la relation (2), qui s'écrit

$$Ri^2 - Vi + P' = 0. \qquad (3)$$

Cette équation, lorsque $0 < P' < P'_m$, a deux racines. Il y a donc deux régimes du moteur fournissant la même puissance mécanique sous la même d.d.p. : l'un à intensité élevée, i_1, et à faible vitesse de rotation, l'autre à intensité faible, i_2, et à grande vitesse de rotation.

Les forces électromotrices correspondantes sont inégales: $E'_1 = \frac{P'}{i_1}$ est faible si l'intensité est élevée, $E'_2 = \frac{P'}{i_2}$ est élevée si l'intensité est faible.

Application numérique : V = 120 volts, R = 20 Ω, P' = 55 watts.
L'équation (3) s'écrit $20i^2 - 120i + 55 = 0$.
Les racines de cette équation sont

$$i = \frac{120 \pm \sqrt{14\,400 - 4\,400}}{40} = \frac{120 \pm 100}{40}.$$

$$i_1 = \frac{120 + 100}{40}, \qquad i_1 = 5{,}5 \text{ A}.$$

$$i_2 = \frac{120 - 100}{40}, \qquad i_2 = 0{,}5 \text{ A}.$$

Les forces contre-électromotrices correspondantes ont pour valeur

$$E'_1 = \frac{55}{5{,}5}, \qquad E'_1 = 10\ V;$$

$$E'_2 = \frac{55}{0{,}5}, \qquad E'_2 = 110\ V.$$

64. — Étude d'une installation de pompage.

Une pompe dont le débit est 60 litres par minute élève l'eau d'un puits à une hauteur de 7 mètres. Elle est actionnée par un moteur électrique branché sur un secteur qui maintient entre ses bornes une différence de potentiel continue de 110 volts.

1° Évaluer en watts la puissance utile de la pompe ainsi que celle du moteur ; on admet que dix pour cent de l'énergie qu'il produit sont dépensés pour vaincre des frottements.

2° Le moteur étant traversé par un courant de 0,75 ampère, déterminer :

a) sa force contre-électromotrice ;

b) sa résistance intérieure ;

c) la quantité de chaleur dégagée en 5 minutes dans cette résistance ;

d) le rendement de l'installation (rapport entre l'énergie mécanique produite par le moteur et l'énergie électrique demandée au secteur pendant le même temps). Quelle serait la dépense pour 2 heures de fonctionnement, à raison de 30 francs le kilowatt-heure ?

3° Le moteur se trouvant dans l'impossibilité de tourner par suite d'un arrêt accidentel de la pompe, mais restant branché au secteur, déterminer la quantité de chaleur dégagée dans ses enroulements en 5 minutes.

4° La pompe, étant désamorcée, tourne à vide sous l'action du moteur et n'élève plus l'eau. En admettant que les frottements à vaincre sont les mêmes que précédemment (question n° 1), déterminer la nouvelle intensité du courant. Le problème admet deux solutions. Quelles remarques vous suggèrent-elles ?

On rappelle que l'équivalent mécanique de la calorie est 4,18 joules et que le poids de 1 litre d'eau est 9,81 newtons.

(Alger.)

1° *Puissance utile de la pompe.*

Le débit de la pompe étant d litres par minute, le poids d'eau soulevé dans une minute est $9{,}81 \times d$ newtons. Si la hauteur d'élévation de l'eau est h mètres, le travail utile de la pompe dans une minute est

$$9{,}81 \times d \times h \text{ joules.}$$

La puissance utile, égale au travail utile par seconde, est

$$P_u = \frac{9{,}81 \times d \times h}{60} \text{ watts.}$$

Numériquement : $d = 60$ litres par minute, $h = 7$ m.

$$P_u = \frac{9{,}81 \times 60 \times 7}{60}, \qquad \mathbf{P_u = 68{,}67 \text{ watts.}}$$

Puissance du moteur.

Cette puissance, P', est égale à la puissance utile, P_u, augmentée de la puissance absorbée dans les frottements, P_f.

$$P' = P_u + P_f.$$

Or $P_f = \frac{10\,P'}{100} = \frac{P'}{10}$.

$$P' = P_u + \frac{P'}{10}$$

ou

$$P' = \frac{10}{9} P_u.$$

Numériquement : $P_u = 68{,}67$ watts.

$$P' = \frac{10}{9} \times 68{,}67, \qquad \mathbf{P' = 76{,}3 \text{ watts.}}$$

2° *a) Force contre-électromotrice du moteur.*

Le moteur, traversé par un courant d'intensité I ampères, actionnant la pompe, produit une puissance mécanique P' watts. Il possède une force contre-électromotrice E', qui est, par définition,

$$E' = \frac{P'}{I}.$$

Numériquement : $P' = 76{,}3$ watts, $I = 0{,}75$ ampère.

$$E' = \frac{76{,}3}{0{,}75} = 101{,}733.$$

$$\mathbf{E' = 101{,}7 \text{ volts.}}$$

b) Résistance intérieure du moteur.

La loi d'Ohm pour un récepteur est applicable à cette portion de circuit. V étant la d.d.p. aux bornes du moteur, R sa résistance, E' sa force contre-électromotrice et I l'intensité, nous avons

$$V = RI + E'.$$

D'où nous tirons R :

$$R = \frac{V - E'}{I}.$$

Numériquement : V = 110 volts, E' = 101,73 volts, I = 0,75 ampère,

$$R = \frac{110 - 101{,}73}{0{,}75} = \frac{8{,}27}{0{,}75} = 11{,}026.$$

$$\mathbf{R = 11{,}03\ \Omega.}$$

c) Quantité de chaleur dégagée dans le moteur.

Le moteur, ayant une résistance R ohms, s'échauffe quand il est traversé par un courant I ampères. La quantité de chaleur q dégagée dans le temps t secondes est donnée par la loi de Joule :

$$q = \frac{1}{4{,}18} RI^2 t.$$

Numériquement : R = 11,03 Ω, I = 0,75 A, t = 5 mn ou 300 s.

$$q = \frac{1}{4{,}18} \times 11{,}03 \times 0{,}75^2 \times 300,$$

$$\mathbf{q = 445\ calories.}$$

d) Rendement de l'installation et dépense pour un fonctionnement de durée 2 heures.

Le rendement, k, est le rapport entre la puissance mécanique du moteur, P', et la puissance électrique VI fournie par le secteur :

$$k = \frac{P'}{VI}.$$

Numériquement : P' = 76,3 watts, V = 110 volts, I = 0,75 ampère.

$$k = \frac{76{,}3}{110 \times 0{,}75} = 0{,}924\,8.$$

$$\mathbf{k = 0{,}925.}$$

La dépense est, à raison de f francs le kWh, le produit par f de la quantité d'énergie consommée dans le temps t et exprimée en kWh. Cette énergie, exprimée en joules, est VIt. Pour l'avoir en kWh nous diviserons VIt par la valeur de 1 kW en joules soit 3 600 000 joules.

Nous aurons $$D = f \times \frac{VIt}{3\,600\,000}.$$

Numériquement : $f = 30$ F, $V = 110$ volts, $I = 0{,}75$ ampère, $t = 2\ h$, ou $2 \times 3\,600$ s.

$$D = 30 \times \frac{110 \times 0{,}75 \times 2 \times 3\,600}{3\,600\,000}.$$

$$\mathbf{D = 4{,}95\ F.}$$

3° Le moteur arrêté et branché sur le secteur se comporte comme une résistance morte. Il est traversé par une intensité I, qui satisfait à la loi d'Ohm $V = RI$.

L'énergie calorifique mise en jeu dans le temps t est alors, en vertu de la loi de Joule :

$$W = RI^2 t = R\frac{V^2}{R^2}t = \frac{V^2}{R}t \text{ joules.}$$

La quantité de chaleur dégagée dans les enroulements est donc

$$q = \frac{1}{4{,}18}\frac{V^2}{R}t.$$

Numériquement : $V = 110$ volts, $R = 11{,}03\ \Omega$, $t = 5$ mn ou 300 s,

$$q = \frac{1}{4{,}18} \times \frac{110^2}{11{,}03} \times 300 = \frac{121 \times 30\,000}{4{,}18 \times 11{,}03},$$

$$\mathbf{q = 78\,700\ calories.}$$

4° La pompe étant désamorcée, sa puissance utile est nulle. La puissance fournie par le moteur se réduit à la puissance P_f absorbée par les frottements.

La puissance VI fournie par le secteur est alors égale à la puissance RI^2, dissipée en chaleur par effet Joule dans le moteur, augmentée de la puissance P_f du moteur :

$$VI = RI^2 + P_f.$$

Cette équation est une équation du second degré en I :

$$RI^2 - VI + P_f = 0.$$

Elle a deux racines (problème 76) :

$$I = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 4RP_f}}{2R}.$$

Il y a donc deux régimes possibles de fonctionnement du moteur, l'un à faible intensité, I_1, correspondant à une force contre-électromotrice élevée $E'_1 = \frac{P_f}{I_1}$ voisine de V et l'autre à forte intensité, I_2,

voisine de $\frac{V}{R}$ et correspondant à une force contre-électromotrice $E'_2 = \frac{P_f}{I_2}$ faible.

Le rendement du moteur n'a pas la même valeur dans les deux cas. Dans le premier cas il a la valeur $k_1 = \frac{P_f}{VI_1}$; dans le second il a la valeur $k_2 = \frac{P_f}{VI_2}$.

Si $I_1 < I_2$, $k_1 > k_2$. Cette différence tient au fait que l'énergie dissipée par effet Joule est dans le premier cas inférieure à celle qui est dissipée dans le second.

Application numérique :

$$V = 110 \text{ volts}, \quad R = 11{,}03\ \Omega, \quad P_f = \frac{P'}{10} = \frac{76{,}3}{10} = 7{,}63;$$

$$I = \frac{110 \pm \sqrt{12\,100 - 4 \times 11{,}03 \times 7{,}63}}{2 \times 11{,}03} = \frac{110 \pm 108{,}4}{22{,}06}.$$

$I_1 = 0{,}072$ A. **$I_2 = 9{,}9$ A.**

65. — Force contre-électromotrice d'un moteur et différence de potentiel à ses bornes.

On alimente sous 120 volts un moteur électrique et une résistance de 10 Ω placés en série.

1° Le moteur est calé ; il se dégage 240 calories par seconde dans la résistance. Quelle est l'intensité du courant? Quelle est la résistance du moteur ?

2° Le moteur tourne ; le dégagement de chaleur dans la résistance n'est plus que 60 calories par seconde. Expliquer pourquoi. Quelle est la nouvelle intensité du courant ?

3° Quelle est la f. c. é. m. du récepteur ? Quelle est sa puissance ?

4° Quelle est dans les deux expériences la différence de potentiel aux bornes du moteur et quel est son rendement ?

(Grenoble.)

1° Le moteur calé n'effectue aucun travail : il se comporte comme une résistance morte, R', en série avec la résistance R.

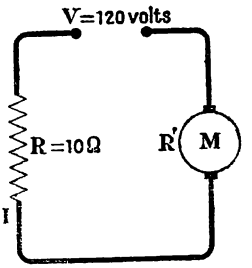
La d.d.p. aux bornes de cette portion de circuit étant V, R et R' sont traversés par le même courant, I, donné par la loi d'Ohm pour des résistances mortes en série :

$$V = (R + R')I. \qquad (1)$$

Calcul de l'intensité du courant.

La quantité de chaleur dégagée dans la résistance R pendant le temps t est donnée par la loi de Joule :

$$q = \frac{1}{4{,}18} \, R I^2 t. \qquad (2)$$



Nous en tirons

$$I = \sqrt{\frac{4{,}18 \times q}{R \times t}}.$$

Numériquement : $q = 240$ calories, $R = 10\ \Omega$, $t = 1$ s.

$$I = \sqrt{\frac{4{,}18 \times 240}{10 \times 1}} = \sqrt{100{,}32} \approx 10{,}016.$$

I = 10 A.

Calcul de la résistance du moteur.

La loi d'Ohm exprimée par la formule (1) donne R', connaissant V, R et I :

$$R' = \frac{V}{I} - R.$$

Numériquement : $V = 120$ volts, $I = 10$ ampères, $R = 10\ \Omega$.

$$R' = \frac{120}{10} - 10, \qquad \mathbf{R' = 2\ \Omega.}$$

2° Lorsque le moteur tourne, il fournit du travail mécanique. Si sa puissance est P' et si le courant qui le traverse est I', sa force contre-électromotrice est $E' = \frac{P'}{I'}$.

La loi d'Ohm s'écrit dans ce cas

$$V = (R + R')I' + E'. \qquad (3)$$

L'intensité dans la portion de circuit, donc dans R, a la valeur

$$I' = \frac{V - E'}{R + R'}.$$

Cette valeur est inférieure à la valeur $I = \frac{V}{R+R'}$, donnée par l'expression (1), dans le cas du moteur calé.

Le dégagement de chaleur produit dans le temps t, q' calories, est donné par l'expression

$$q' = \frac{1}{4{,}18} RI'^2 t. \qquad (4)$$

Pour le même temps, t, que dans le cas précédent nous avons donc $q' < q$.

La nouvelle intensité I' du courant est, d'après l'expression (4),

$$I' = \sqrt{\frac{4{,}18 \times q'}{R \times t}}.$$

Numériquement : $q' = 60$ calories, $R = 10\ \Omega$, $t = 1$ s.

$$I' = \sqrt{\frac{4{,}18 \times 60}{10 \times 1}} = \sqrt{25{,}08} = 5{,}008.$$

$$\mathbf{I' = 5\,A.}$$

3° La force contre-électromotrice du moteur est fournie par l'expression (3) :

$$E' = V - (R + R')I'.$$

Sa puissance est, en vertu de la définition de la force contre-électromotrice,

$$P' = E'I'.$$

Numériquement : $V = 120$ volts, $R = 10\ \Omega$, $R' = 2\ \Omega$, $I' = 5$ A.

$E' = 120 - (10 + 2)\,5$, **$E' = 60$ volts.**

$P' = 60 \times 5$, **$P' = 300$ watts.**

4° *Différence de potentiel aux bornes du moteur.*

Dans la première expérience (moteur calé) la d.d.p. aux bornes du moteur est égale à la chute de tension ohmique :

$$V_1 = R'I.$$

Dans la deuxième expérience (moteur tournant) cette d.d.p. est égale à la chute de tension ohmique augmentée de la force contre-électromotrice :

$$V'_1 = R'I' + E'.$$

Numériquement : $R' = 2\ \Omega$, $I = 10$ A, $I' = 5$ A, $E' = 60$ V.

$$V_1 = 2 \times 10, \qquad V_1 = \mathbf{20\ volts.}$$

$$V'_1 = 2 \times 5 + 60, \qquad V'_1 = \mathbf{70\ volts.}$$

Rendement k.

Le rendement du moteur est le rapport de sa puissance mécanique, P', à la puissance électrique, P, qu'il reçoit :

$$k = \frac{P'}{P}.$$

Dans la première expérience $P' = 0$: le rendement du moteur est nul. Dans la seconde $P' = E'I'$ et $P = VI'$.

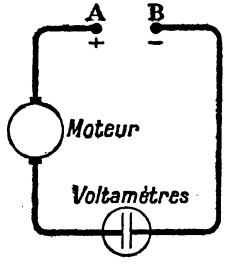
D'où $$k = \frac{E'I'}{VI'} = \frac{E'}{V}.$$

Numériquement : $E' = 60$ volts, $V = 120$ volts.

$$k = \frac{60}{120}, \qquad k = \mathbf{0,5.}$$

66. — Loi d'Ohm pour une portion de circuit renfermant un moteur et des voltamètres en série.

Une distribution électrique maintient entre deux bornes, A et B, une différence de potentiel V égale à 110 volts. Entre ces deux bornes, on intercale (fig. ci-dessous) : *a*) un moteur dont la résistance *r* est égale à 1 ohm et qui développe une puissance de 0,75 ch ; *b*) une série de voltamètres dont la résistance, R, est égale à 3 ohms et où le dégagement de l'hydrogène indique une intensité de courant *i* égale à 10 ampères. Les fils de connexion ont une résistance négligeable.



1° Expliquer ce qui se passe dans le circuit au point de vue de la chute de potentiel.

Quel est le rendement du moteur ?

Quelle est la force contre-électromotrice de la série de voltamètres ?

2° On cale le moteur de façon à l'empêcher de tourner. Qu'y a-t-il de changé ? Quelle est la nouvelle intensité du courant ? Quelle est, dans ces conditions, la quantité de chaleur dégagée par seconde dans le moteur ? Que est, en outre, le volume d'hydrogène dégagé par minute dans chaque voltamètre, sachant que 1 g d'hydrogène occupe un volume de 11,2 litres ?

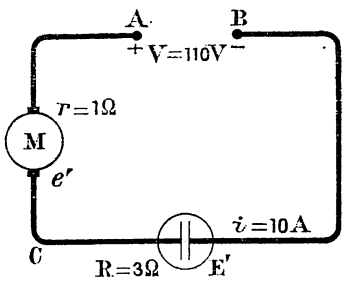
On rappelle qu'un cheval-vapeur équivaut à 736 watts et que 96 500 coulombs libèrent 1 g d'hydrogène.

(Lyon.)

1° *Étude de la chute de potentiel entre* A *et* B.

Le moteur est traversé par un courant i. Il fournit une puissance mécanique, P'. C'est un récepteur, de résistance r, qui possède une force contre-électromotrice $e' = \frac{P'}{i}$.

La d.d.p. entre ses bornes est égale, d'après la loi d'Ohm pour un récepteur, à la chute de potentiel ohmique ri augmentée de la force contre-électromotrice $e' = \frac{P'}{i}$:



$$V_A - V_C = ri + \frac{P'}{i}. \quad (1)$$

La d.d.p. aux bornes de la série de voltamètres est

$$V_C - V_B = (V_A - V_B) - (V_A - V_C).$$

La d.d.p. $V_A - V_B$ est connue : $V_A - V_B = V$. Nous pouvons donc calculer $V_C - V_B$:

$$V_C - V_B = V - \left(ri + \frac{P'}{i}\right). \quad (2)$$

Numériquement : $V = 110$ volts, $r = 1\ \Omega$, $i = 10$ A,

$$P' = \frac{3}{4} \text{ ch, ou } \frac{3}{4} \times 736 = 552 \text{ W.}$$

$$V_A - V_C = 1 \times 10 + \frac{552}{10}, \qquad \mathbf{V_A - V_C = 65{,}2\ V.}$$

$$V_C - V_B = 110 - \left(1 \times 10 + \frac{552}{10}\right), \qquad \mathbf{V_C - V_B = 44{,}8\ V.}$$

Rendement du moteur.

Le rendement du moteur est le rapport de la puissance mécanique qu'il fournit à la puissance électrique qu'il reçoit.

Cette dernière puissance est, d'après la définition de la d.d.p.,

$$(V_A - V_C)i = ri^2 + P'.$$

Elle se retrouve dans le moteur sous deux formes : calorifique (ri^2) et mécanique (P').

Le rendement du moteur est alors

$$k = \frac{P'}{ri^2 + P'}.$$

Numériquement : $P' = 552$ W, $r = 1\ \Omega$, $i = 10$ A.

$$k = \frac{552}{1 \times 10^2 + 552} = \frac{552}{652} = 0{,}846\,62.$$

$$k = \mathbf{0{,}847.}$$

Force contre-électromotrice de la série de voltamètres.

La série de voltamètres est un récepteur de résistance R et de force contre-électromotrice E'. La d.d.p. à ses bornes est, en vertu de la loi d'Ohm pour un récepteur,

$$V_C - V_B = Ri + E'.$$

Remplaçant $V_C - V_B$ par l'expression (2) nous avons

$$V - \left(ri + \frac{P'}{i}\right) = Ri + E'.$$

Nous en déduisons E' :

$$E' = V - (r + R)\, i - \frac{P'}{i}.$$

Numériquement :

$$V = 110 \text{ volts}, \quad r = 1\ \Omega, \quad R = 3\Omega, \quad i = 10\text{ A}, \quad P' = 552\text{ W};$$

$$E' = 110 - (1 + 3)\, 10 - \frac{552}{10} = 70 - 55{,}2,$$

$$\mathbf{E' = 14{,}8\ V.}$$

2° Le moteur, étant calé, ne fournit aucune puissance mécanique; la seule puissance qu'il met en jeu est calorifique. Il se comporte comme une résistance morte.

Le changement introduit dans le circuit précédent consiste donc dans la suppression de la force contre-électromotrice, e', du moteur, ce qui entraîne une augmentation de l'intensité.

Nouvelle intensité du courant.

La d.d.p. aux bornes du moteur est, avec la nouvelle valeur I de l'intensité,

$$V_A - V_C = rI.$$

La d.d.p. aux bornes de la série de voltamètres est

$$V_C - V_B = RI + E'.$$

La d.d.p. entre A et B est

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B)$$

ou

$$V = rI + RI + E'.$$

Cette relation fournit I :

$$I = \frac{V - E'}{r + R}.$$

Numériquement :

$V = 110$ volts, $E' = 14{,}8$ volts, $r = 1\ \Omega$, $R = 3\ \Omega$.

$$I = \frac{110 - 14{,}8}{1 + 3}, \qquad \mathbf{I = 23{,}8\ A.}$$

Quantité de chaleur dégagée par seconde dans le moteur.

L'énergie calorifique, q calories, dissipée en t secondes dans la résistance r ohms par le courant I ampères est, d'après la loi, de Joule

$$q = \frac{r \times I^2 \times t}{4{,}18}.$$

Numériquement : $r = 1\ \Omega$, $I = 23{,}8$ A, $t = 1$ s.

$$q = \frac{1 \times 23{,}8^2 \times 1}{4{,}18}, \qquad \mathbf{q = 136\ calories.}$$

Volume d'hydrogène dégagé par minute dans chaque voltamètre.

Soit v cm³ ce volume. Nous savons que 96 500 coulombs libèrent 1 gramme d'hydrogène. La quantité d'électricité It coulombs en libère une masse m grammes telle que

$$m = \frac{1 \times It}{96\,500}.$$

Exprimons cette masse en fonction du volume :

si 1 g d'hydrogène occupe un volume de 11,2 l ou 11 200 cm³ la masse de v cm³ est

$$m = \frac{1 \times v}{11\,200}.$$

L'expression précédente s'écrit

$$\frac{1 \times v}{11\,200} = \frac{1 \times It}{96\,500}.$$

Nous en tirons le volume cherché v :

$$v = \frac{11\,200}{96\,500} \times It.$$

Numériquement : $I = 23{,}8$ A, $t = 1$ mn, ou 60 s,

$$v = \frac{11\,200 \times 23{,}8 \times 60}{96\,500}.$$

$$v = \mathbf{165\ cm^3}.$$

CHAPITRE XVII

Loi de Pouillet.

67. — Circuit comprenant une résistance et un générateur. Quantité de chaleur dégagée dans la résistance. Différence de potentiel aux bornes du générateur.

1° La résistivité d'un alliage est 10^{-6} ohm.mètre. Quelle sera la résistance d'un fil de cet alliage de 5,50 m de long et dont la section droite circulaire a un diamètre de 1 mm ?

2° On relie par ce fil les deux bornes d'un générateur dont la force électromotrice est 6 volts et la résistance intérieure 3 ohms.

Quelles seront : *a*) la chaleur dégagée en 5 minutes par le passage du courant dans la résistance ?

***b*) la différence de potentiel entre les bornes du générateur ?**

3° Quelle résistance faut-il substituer à la résistance précédente pour que le dégagement de chaleur obtenu en 5 minutes dans le fil soit 150 calories ?

Des deux solutions obtenues quelle est celle que vous adopteriez et pourquoi?

On sait que 1 calorie correspond à 4,18 joules.

(Aix-Marseille.)

1° La résistance d'un fil cylindrique de résistivité ρ, de longueur l et de section s est

$$R = \rho \frac{l}{s}.$$

Si d est le diamètre du fil, $s = \frac{\pi d^2}{4}$; la résistance s'exprime par la formule

$$R = \frac{4\rho l}{\pi d^2}.$$

Numériquement : $\rho = 10^{-6}\ \Omega m$, $l = 5{,}50$ m, $d = 1$ mm ou $0{,}001$ m.

$$R = \frac{4 \times 10^{-6} \times 5{,}5}{\pi \times (0{,}001)^2} = \frac{22}{\pi}.$$

$$\mathbf{R = 7\ \Omega.}$$

2° Les deux bornes du générateur, de force électromotrice E et de résistance intérieure r, étant reliées par le fil de résistance R, l'intensité I du courant dans ce circuit satisfait à la loi de Pouillet pour un circuit sans récepteur

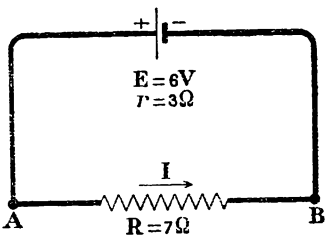
$$E = (R + r)\, I. \qquad (1)$$

a) La chaleur dégagée pendant t secondes par le passage de ce courant I ampères dans la résistance R ohms est donnée par la loi de Joule :

$$q = \frac{R\, I^2 t}{4{,}18},$$

ou, en tenant compte de la valeur de I tirée de (1),

$$q = \frac{R\, E^2 t}{4{,}18\,(R + r)^2}. \qquad (2)$$



Numériquement : R = 7 Ω, r = 3 Ω, E = 6 volts, t = 5 mn ou 300 s.

$$q = \frac{7 \times 6^2 \times 300}{4{,}18\,(7 + 3)^2} = \frac{756}{4{,}18},$$

q = 180,8 calories.

b) La d.d.p. entre les bornes + et — du générateur, $V_A - V_B$, est donnée par la loi d'Ohm appliquée à un générateur traversé par un courant allant du pôle — vers le pôle + :

$$V_A - V_B = E - rI.$$

En tenant compte de la valeur de I tirée de (1) nous avons

$$V_A - V_B = E - r\frac{E}{R + r},$$

$$V_A - V_B = \frac{R\, E}{R + r}.$$

Cette d.d.p. est aussi celle qui existe entre les bornes de la résistance morte R et qui est donnée par la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V_A - V_B = R\, I,$$

ou

$$V_A - V_B = \frac{R\, E}{R + r}.$$

Numériquement : $R = 7\ \Omega$, $r = 3\ \Omega$, $E = 6$ volts.

$$V_A - V_B = \frac{7 \times 6}{7 + 3},$$

$$V_A - V_B = 4{,}2 \text{ volts.}$$

3° Soit X la résistance qu'il faut substituer à la résistance R précédente pour obtenir dans le même temps t un dégagement de chaleur donné q_1 calories.

La relation (2) dans laquelle nous substituons X à R et q_1 à q donne la valeur de la résistance X:

$$q_1 = \frac{X E^2 t}{4{,}18\,(X + r)^2}.$$

C'est une équation du second degré en X:

$$X^2 + \left(2r - \frac{E^2 t}{4{,}18 q_1}\right) X + r^2 = 0.$$

Numériquement :

$r = 3\ \Omega$, $E = 6$ volts, $t = 5$ mn ou 300 s, $q_1 = 150$ calories.

$$X^2 + \left(6 - \frac{6^2 \times 300}{4{,}18 \times 150}\right) X + 3^2 = 0,$$

$$X^2 - 11{,}22\,X + 9 = 0.$$

Cette équation a pour racines

$$X = 5{,}61 \pm \sqrt{5{,}61^2 - 9} = 5{,}61 \pm 4{,}74,$$

ou

$$X_1 = \mathbf{10{,}35\,\Omega} \quad \text{et} \quad X_2 = \mathbf{0{,}87\,\Omega}.$$

Le dégagement de chaleur de 150 calories en 5 minutes peut être obtenu soit avec la résistance $X_1 = 10{,}35\,\Omega$ soit avec la résistance $X_2 = 0{,}87\ \Omega$.

Dans le premier cas le générateur fournit une intensité $I_1 = \dfrac{E}{X_1 + r}$ et une puissance $P_1 = EI_1 = \dfrac{E^2}{X_1 + r}$.

Dans le second cas, le générateur fournit une intensité $I_2 = \dfrac{E}{X_2 + r}$ et une puissance $P_2 = EI_2 = \dfrac{E^2}{X_2 + r}$. Si $X_1 > X_2$ nous avons $P_1 < P_2$.

A égalité d'énergie calorifique dans la résistance X, il y a intérêt à choisir la solution la moins coûteuse : c'est celle qui exige du générateur la puissance la plus faible c'est-à-dire celle qui correspond à X_1, plus grande valeur de X.

68. — Étude d'un circuit comprenant un générateur, une résistance et un voltamètre en série.

Un circuit fermé comprend un générateur (de force électromotrice E= 6 V et de résistance intérieure $r = 1$ ohm), une résistance R = 4 ohms et un voltamètre à eau acidulée par l'acide sulfurique.
L'intensité du courant est alors $I_1 = 0{,}45$ A.

1° Quelle est la puissance totale développée par le générateur ?
Quelle est la puissance utilisée dans le circuit à l'extérieur du générateur ?
Quelle est la puissance absorbée par le voltamètre ?

2° La résistance R est supprimée; l'intensité du courant devient alors I_2=0,75 A.
Quelle est la force contre-électromotrice du voltamètre ?
Quelle est sa résistance intérieure ?
Quelle est la puissance utilisée dans le voltamètre autrement que par effet Joule ?

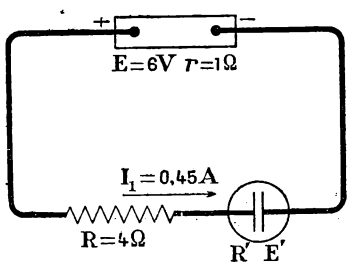
3° Quel est dans ce deuxième cas le volume d'hydrogène dégagé en 1 heure dans les conditions normales de température et de pression ?
96 500 coulombs libèrent une valence-gramme.
Une mole de gaz occupe dans les conditions normales 22 400 cm³.

4° L'hydrogène et l'oxygène dégagés sont recombinés. Quelle est la quantité totale de chaleur dégagée lorsque l'eau formée a été ramenée à la température initiale du voltamètre ?

(Lille.)

1° Désignons par P la puissance totale développée par le générateur. Par définition, la f.é.m. du générateur, E, est le rapport de la puissance totale P qu'il fournit à l'intensité I_1 du courant qu'il débite :

$$E = \frac{P}{I_1}.$$



Cette formule donne P si l'on connaît E et I_1:

$$P = EI_1.$$

La puissance P_e utilisée dans le circuit à l'extérieur du générateur est égale à la puissance totale P diminuée de la puissance rI_1^2 dissipée en chaleur dans le générateur :

$$P_e = P - rI_1^2.$$

La puissance P_v absorbée par le voltamètre est égale à la puissance P_e utilisée dans le circuit extérieur du générateur, diminuée de la puissance dissipée en chaleur dans la résistance R :

$$P_v = P_e - RI_1^2.$$

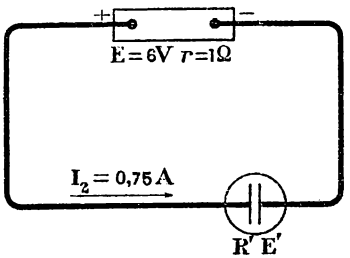
Application numérique : $E = 6$ V, $I_1 = 0{,}45$ A, $r = 1\ \Omega$, $R = 4\ \Omega$.

$P = 6 \times 0{,}45$, **$P = 2{,}70$ W.**

$P_e = 2{,}7 - 1 \times 0{,}45^2 = 2{,}4975$, **$P_e = 2{,}50$ W.**

$P_v = 2{,}4975 - 4 \times 0{,}45^2 = 1{,}6875$, **$P_v = 1{,}69$ W.**

2° La loi de Pouillet appliquée aux deux circuits donnés permet d'obtenir la f.é.m. E′ et la résistance R′ du voltamètre.



Dans le premier cas nous avons

$$E = (r + R + R')\, I_1 + E'.$$

Dans le deuxième,

$$E = (r + R')\, I_2 + E'.$$

Des deux équations équivalentes,

$$E' + R'I_1 = E - rI_1 - RI_1,$$
$$E' + R'I_2 = E - rI_2,$$

nous tirons

$$E' = E - R\,\frac{I_1 I_2}{I_2 - I_1}$$

et

$$R' = R\,\frac{I_1}{I_2 - I_1} - r.$$

La puissance utilisée dans le voltamètre autrement que par effet Joule est celle qui est utilisée dans les réactions chimiques qui accompagnent l'électrolyse. D'après la définition de la force contre-électromotrice elle est égale au produit de la force contre-électromotrice par l'intensité. Dans le deuxième montage, l'intensité étant I_2, cette puissance P′ a pour valeur

$$P' = E'I_2.$$

Application numérique :

$E = 6$ V, $r = 1\Omega$, $R = 4\Omega$, $I_1 = 0{,}45$ A, $I_2 = 0{,}75$ A.

$E' = 6 - 4 \times \dfrac{0{,}45 \times 0{,}75}{0{,}75 - 0{,}45}$, **$E' = 1{,}5$ V.**

$R' = 4 \times \dfrac{0{,}45}{0{,}75 - 0{,}45} - 1$, **$R' = 5\ \Omega$.**

$P' = 1{,}5 \times 0{,}75$, **$P' = 1{,}125$ W.**

3° Désignons par v cm³ le volume d'hydrogène dégagé dans les conditions normales de température et de pression (0 °C et 76 cm de mercure) dans le temps t s par un courant I_2 ampères.

Dans l'électrolyse d'une solution d'acide sulfurique, il y a, à la cathode, dégagement d'hydrogène provenant de H_2SO_4 et, à l'anode, d'oxygène provenant de la réaction secondaire du radical SO_4 sur l'eau.

Pour 1 mole H_2SO_4 on obtient 1 mole H_2 et $\frac{1}{2}$ mole O_2.

1 mole H_2 occupe dans les conditions normales 22 400 cm, et correspond à 2 valence-gramme.

v cm³ correspondent à un nombre de valence-gramme $\frac{2 \times v}{22\,400}$.

Il faut donc, en vertu de la loi de Faraday, utiliser le même nombre de faradays soit $\frac{I_2 t}{\mathcal{F}}$ faradays.

$$\frac{2 \times v}{22\,400} = \frac{I_2 t}{\mathcal{F}}$$

Cette relation donne v :

$$v = \frac{22\,400 \times I_2 t}{2\mathcal{F}}.$$

Application numérique :

$$I_2 = 0{,}75 \text{ A}; \quad t = 1 \text{ h ou } 3\,600 \text{ s}; \quad \mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}.$$

$$v = \frac{22\,400 \times 0{,}75 \times 3\,600}{2 \times 96\,500}$$

$$v = \mathbf{313 \text{ cm}^3}.$$

4° Désignons par q calories la quantité de chaleur dégagée dans la recombinaison de l'hydrogène et de l'oxygène.

La puissance P′, calculée dans la question 2° quand l'intensité a la valeur I_2, sert à décomposer l'eau à la température du voltamètre. Par suite, si le passage du courant dure t s l'énergie chimique mise en jeu est

$$W' = P' \times t.$$

Si l'on recombine l'hydrogène et l'oxygène recueillis dans le temps t et si l'on ramène l'eau à la température du voltamètre on met en jeu la quantité de chaleur q calories dont l'équivalent en joules est 4,18 q. Il est évident que, la deuxième transformation étant l'inverse de la première, les deux quantités d'énergie sont égales :

$$4{,}18\,q = P' \times t.$$

Nous tirons de cette égalité

$$q = \frac{P' \times t}{4{,}18}.$$

Application numérique : $P' = 1{,}125$ W, $t = 1$ h ou 3 600 s.

$$q = \frac{1{,}125 \times 3\,600}{4{,}18} = 968{,}9$$

$$q = \mathbf{969\ calories.}$$

69. — Étude d'un circuit comprenant des piles en série et en opposition.

1° Un circuit est constitué par deux piles identiques, placées en série, et une résistance extérieure de 20 ohms; chaque pile a une force électromotrice de 2,8 volts et sa résistance intérieure est 5 ohms.

Calculer l'intensité du courant qui traverse le circuit.

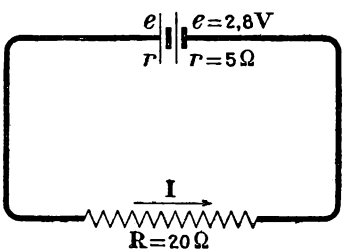
2° On place une troisième pile dans le circuit ; si elle est en série avec les deux autres, l'intensité ne change pas ; mais si on la met en opposition avec les deux premières, on remarque que l'intensité diminue de moitié.

On demande la force électromotrice de la pile et sa résistance intérieure.

(Strasbourg.)

1° Sous la forme la plus générale, la loi de Pouillet pour un circuit fermé comprenant des générateurs, des résistances mortes et des récepteurs, s'écrit

$$\Sigma E = \Sigma RI + \Sigma E'. \quad (1)$$



Dans le montage étudié il y a deux générateurs en série, dont la somme des f.é.m. est $\Sigma E = e + e = 2e$, trois résistances en série, celles des deux piles et la résistance extérieure, dont la somme est

$$\Sigma R = r + r + R = 2r + R.$$

Il n'y a pas de récepteur, donc pas de force contre-électromotrice : $\Sigma E' = 0$.

Nous avons donc

$$2e = (2r + R)I.$$

Cette équation donne I si nous connaissons e, r et R :

$$I = \frac{2e}{2r + R}.$$

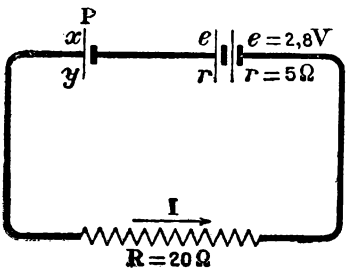
Application numérique : $e = 2{,}8$ V, $r = 5\ \Omega$, $R = 20\ \Omega$.

$$I = \frac{2 \times 2{,}8}{2 \times 5 + 20} = \frac{5{,}6}{30} = 0{,}186\,6\ldots$$

$$\mathbf{I = 0{,}187\ A.}$$

2° Soit x et y la f.é.m. et la résistance cherchées.

Les deux équations nécessaires pour effectuer cette double détermination sont fournies par la loi de Pouillet appliquée aux deux montages proposés.



Si la pile P est en série avec les deux autres,

$\Sigma E = x + e + e = x + 2e$,

$\Sigma R = y + r + r + R = y + 2r + R$,

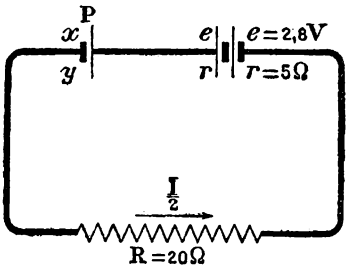
$\Sigma E' = 0$,

l'intensité I a la valeur calculée précédemment : $I = \dfrac{2e}{2r + R}$.

L'équation (1) s'écrit

$$x + 2e = (y + 2r + R) \times \frac{2e}{2r + R}. \qquad (2)$$

Si la pile P est en opposition avec les deux autres elle ne se comporte plus comme un générateur mais comme un récepteur de force contre-électromotrice x.



Dans ce cas :

$\Sigma E = e + e = 2e$,

$\Sigma R = y + r + r + R = y + 2r + R$,

$\Sigma E' = x$,

l'intensité a la valeur

$$\frac{I}{2} = \frac{e}{2r + R}.$$

L'équation (1) s'écrit

$$2e = (y + 2r + R) \times \frac{e}{2r + R} + x. \qquad (3)$$

Les équations (2) et (3) deviennent, après simplification,

$$(2r + R)x - 2ey = 0,$$
$$(2r + R)x + ey = e(2r + R).$$

Ce système d'équations admet pour solution

$$x = \frac{2e}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{2r + R}{3}.$$

Application numérique : $e = 2{,}8$ V, $r = 5\ \Omega$, $R = 20\ \Omega$.

$$x = \frac{2 \times 2{,}8}{3}, \qquad x = \mathbf{1{,}87\ V.}$$

$$y = \frac{2 \times 5 + 20}{3}, \qquad y = \mathbf{10\ \Omega.}$$

70. — Étude d'un circuit comprenant deux voltamètres en série.

On place en série entre les bornes d'un générateur de force électromotrice 31,6 volts un voltamètre à eau acidulée et une cuve électrolytique à sulfate de cuivre avec électrodes de cuivre. Dans le voltamètre on recueille l'ensemble des deux gaz qui se dégagent aux deux électrodes en 1 minute ; on obtient ainsi 18 cm³ pour leur volume total. Sachant que la force contre-électromotrice du voltamètre est 1,6 volt on demande :

1° l'augmentation de masse en 1 heure de la cathode de la cuve à sulfate de cuivre ;

2° l'intensité du courant ;

3° la résistance totale du circuit.

4° Les deux électrodes de cuivre sont remplacées par des électrodes de platine de mêmes dimensions. On ne recueille plus alors par minute que 17,6 cm³ de gaz dans le voltamètre. Expliquer pourquoi et calculer la force contre-électromotrice de la cuve à sulfate de cuivre.

(96 500 coulombs libèrent une valence-gramme. Le volume d'un gramme d'hydrogène est 11,2 l. Cu = 63.)

(Paris.)

1° Soit m g la masse de cuivre déposée par le courant I ampères pendant t secondes. Cette masse est donnée par la loi de Faraday :

$$m = \frac{1}{\mathcal{F}} \times \frac{A}{n} \times It. \qquad (1)$$

La constante $\mathcal{F}$ est la quantité d'électricité qui met en liberté une masse de métal égale à une valence-gramme $\frac{A}{n}$ de ce métal. Cette quantité est connue.

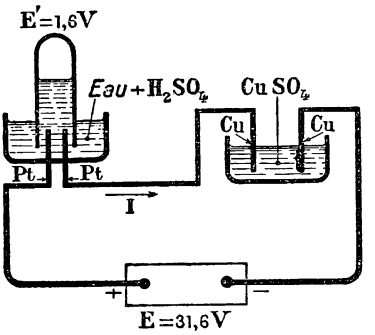
Nous pourrions calculer m si nous connaissions I.

Pour déterminer I une deuxième équation est nécessaire. Elle nous est fournie par le volume d'hydrogène dégagé par le courant I en t' s.

Nous savons que dans l'électrolyse d'une solution d'acide sulfurique avec électrodes inattaquables (Pt) la réaction secondaire du radical SO_4 sur l'eau donne à l'anode un dégagement d'oxygène en même temps que l'acide sulfurique se reconstitue. A la cathode on obtient dans le même temps un volume d'hydrogène double du volume d'oxygène.

Si l'on recueille l'ensemble des deux gaz, le volume d'hydrogène représente les $\frac{2}{3}$ du volume total. v cm³ étant le volume total recueilli en t' secondes, le volume d'hydrogène est $\frac{2v}{3}$ cm³ et sa masse, en grammes, est

$$m' = \frac{1}{11\,200} \times \frac{2v}{3}.$$



L'intensité du courant qui a provoqué ce dégagement d'hydrogène satisfait à la loi de Faraday :

$$m' = \frac{1}{\mathcal{F}} \times \frac{A'}{n'} \times It'. \quad (2)$$

En divisant membre à membre (1) et (2) nous éliminons I :

$$\frac{m}{m'} = \frac{\frac{A}{n} \times t}{\frac{A'}{n'} \times t'}.$$

Nous obtenons finalement

$$m = \frac{1}{11\,200} \times \frac{2v}{3} \times \frac{\frac{A}{n}}{\frac{A'}{n'}} \times \frac{t}{t'}.$$

Application numérique : $v = 18$ cm³, pour le cuivre $\frac{A}{n} = \frac{63}{2}$, pour l'hydrogène $\frac{A'}{n'} = \frac{1}{1}$, $t = 1$ h ou 3 600 s, $t' = 1$ mn ou 60 s.

$$m = \frac{1}{11\,200} \times \frac{2 \times 18}{3} \times \frac{\frac{63}{2}}{\frac{1}{1}} \times \frac{3\,600}{60}.$$

$$m = 2{,}025 \text{ g.}$$

2° L'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{1}{11\,200} \times \frac{2v}{3} = \frac{1}{\mathcal{F}} \times \frac{A'}{n'} \times I \times t'.$$

Cette nouvelle équation donne l'intensité I dans le circuit :

$$I = \frac{1}{11\,200} \times \frac{2v}{3} \times \frac{1}{\frac{A'}{n'}} \times \frac{\mathcal{F}}{t'}. \qquad (3)$$

Application numérique :

$v = 18$ cm^3, $\frac{A'}{n'} = \frac{1}{1} = 1$, $\mathcal{F} = 96\,500$ C, $t' = 1$ mn ou 60 s.

$$I = \frac{1}{11\,200} \times \frac{2 \times 18}{3} \times \frac{1}{1} \times \frac{96\,500}{60}.$$

$$\mathbf{I = 1{,}723\ A.}$$

3° La résistance totale du circuit, R, s'obtient par application de la loi de Pouillet à ce circuit fermé.

Le voltamètre à eau acidulée, dans lequel la réaction globale se réduit à la décomposition de l'eau en ses éléments, met en jeu, outre de l'énergie calorifique, de l'énergie chimique. Il possède une force contre-électromotrice, E', connue.

Le voltamètre à sulfate de cuivre avec électrodes en cuivre ne met en jeu que de l'énergie calorifique. Par suite de la réaction secondaire anodique ($Cu + SO_4 \rightarrow CuSO_4$) le sulfate de cuivre se reconstitue et l'on n'observe que le transport de cuivre de l'anode sur la cathode sans réaction chimique. Ce voltamètre ne possède donc pas de force contre-électromotrice.

Dans ces conditions la loi de Pouillet appliquée à ce circuit fermé s'écrit

$$E = RI + E',$$

d'où

$$R = \frac{E - E'}{I}.$$

Application numérique : $E = 31{,}6$ V, $E' = 1{,}6$ V, $I = 1{,}723$ A.

$$R = \frac{31{,}6 - 1{,}6}{1{,}723}.$$

$$\mathbf{R = 17{,}41\ \Omega.}$$

4° Si les électrodes de cuivre sont remplacées par des électrodes de platine de mêmes dimensions, la résistance de la cuve à sulfate de cuivre n'est pas modifiée. La résistance de l'ensemble du circuit conserve donc la valeur R précédente.

Si l'on obtient en 1 minute un volume $v_1 < v$ dans le voltamètre contenant la solution d'acide sulfurique c'est que l'intensité dans le circuit a diminué : $I_1 < I$.

Cette diminution de l'intensité est due à l'apparition d'une force contre-électromotrice dans le voltamètre à sulfate de cuivre avec les nouvelles électrodes de platine.

Dans ce cas la réaction secondaire anodique du radical SO_4 sur l'eau est

$$SO_4 + H_2O \rightarrow H_2SO_4 + \frac{1}{2} O_2\uparrow$$

A la cathode le cuivre se dépose sur le platine.

Dans cette électrolyse il y a disparition simultanée d'une molécule $CuSO_4$ et d'une molécule H_2O, formation d'une molécule H_2SO_4, mise en liberté d'oxygène à l'anode et de cuivre à la cathode. Le bilan énergétique n'est pas nul. Ce voltamètre possède donc une force contre-électromotrice.

Désignons-la par E'_1.

Dans ce cas la loi de Pouillet s'écrit

$$E = R I_1 + E' + E'_1.$$

La nouvelle intensité, I_1, se calcule à partir de la nouvelle valeur du volume v_1 du dégagement gazeux. La formule (3) montre que dans un temps t' constant l'intensité est proportionnelle au volume du dégagement gazeux :

$$\frac{I_1}{I} = \frac{v_1}{v}.$$

Nous avons donc

$$E'_1 = E - E' - R I_1 = E - E' - R I \frac{v_1}{v},$$

ou en tenant compte de la relation

$$R = \frac{E - E'}{I},$$

$$E'_1 = (E - E') \frac{v - v_1}{v}.$$

Application numérique :

$$E = 31{,}6 \text{ V}, \quad E' = 1{,}6 \text{ V}, \quad v = 18 \text{ cm}^3, \quad v' = 17{,}6 \text{ cm}^3.$$

$$E'_1 = (31{,}6 - 1{,}6) \frac{18 - 17{,}6}{18},$$

$$\mathbf{E'_1 = 0{,}666 \text{ V}.}$$

71. — Circuit comprenant un moteur successivement bloqué puis tournant.

1° Un voltmètre de grande résistance, relié aux pôles d'une série d'accumulateurs, indique 100 volts. Laissant le voltmètre en place, on réunit les pôles de la batterie aux bornes d'une résistance de x ohms ; le courant qui passe dans la résistance est 25 ampères et le voltmètre indique alors 50 volts.

Calculer la force électromotrice de la série d'accumulateurs, la résistance x et la résistance intérieure y de cette série d'accumulateurs.

2° L'intensité tombe à 20 ampères lorsqu'un moteur qu'on empêche de tourner est mis en série avec la résistance x. Calculer la résistance, z, de ce moteur.

3° On laisse tourner le moteur. L'intensité tombe à 15 ampères.

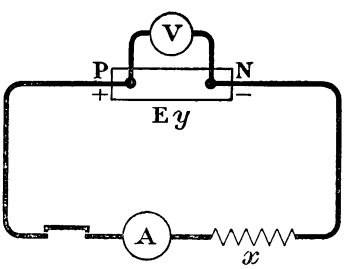
Quelle est la force contre-électromotrice du moteur ?

Quelle est la puissance qu'il fournit ?

Quelle est la différence de potentiel qu'indiquerait un voltmètre branché à ses bornes ?

(Poitiers.)

1° *Force électromotrice de la série d'accumulateurs.* — En circuit ouvert, le voltmètre de grande résistance relié aux pôles du générateur indique la f.é.m. du générateur.



En effet, la d.d.p. aux bornes d'un générateur de résistance y traversé par un courant, I, allant du pôle — au pôle + est, en vertu de la loi d'Ohm pour un générateur,

$$V_P - V_N = E - y\,I. \quad (1)$$

En circuit ouvert, $I = 0$ donc

$$E = V_P - V_N.$$

Numériquement :

$$V_P - V_N = 100 \text{ V.}$$

$$\mathbf{E = 100\ V.}$$

Résistance du circuit extérieur et de la série d'accumulateurs.

Si le générateur de résistance y est fermé sur une résistance, le circuit est parcouru par un un courant I.

La d.d.p. aux bornes du générateur est donnée par l'expression (1), mais cette d.d.p. est aussi celle qui existe aux bornes de la résistance x, soit x I, en supposant négligeable la résistance de l'ampèremètre.

$$V_P - V_N = E - yI = xI.$$

Connaissant $V_P - V_N$, E et I nous avons x et y :

$$x = \frac{V_P - V_N}{I}, \qquad y = \frac{E - (V_P - V_N)}{I}.$$

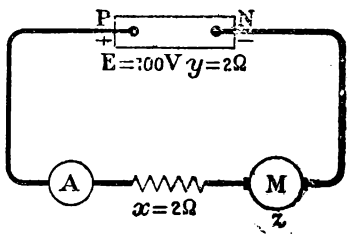
Numériquement : $E = 100\,V$, $V_P - V_N = 50\,V$, $I = 25\,A$.

$$x = \frac{50}{25}, \qquad x = 2\,\Omega.$$

$$y = \frac{100 - 50}{25}, \qquad y = 2\,\Omega.$$

2° Le moteur, qu'on empêche de tourner, se comporte comme une résistance morte; z étant la résistance de ce moteur le circuit, dont la résistance totale est $x + y + z$, est parcouru par un courant I qui satisfait à la loi de Pouillet:

$$E = (x + y + z)\,I.$$



Cette relation permet de calculer z :

$$z = \frac{E}{I} - x - y.$$

Numériquement : $E = 100\,V$, $I = 20\,A$, $x = 2\,\Omega$, $y = 2\,\Omega$.

$$z = \frac{100}{20} - 2 - 2,$$

$$z = 1\,\Omega.$$

3° En tournant, le moteur fournit un travail mécanique. Il possède une force contre-électromotrice, E'. Dans ce cas la loi de Pouillet a pour expression

$$E = (x + y + z)\,I + E'.$$

Nous en tirons E' :

$$E' = E - (x + y + z)\,I.$$

La puissance mécanique fournie par le moteur est, d'après la définition de la force contre-électromotrice,

$$P' = E'\,I.$$

La d.d.p. à ses bornes est donnée par la loi d'Ohm pour un récepteur. C'est aussi l'indication que donnerait un voltmètre branché à ses bornes.

$$V = z\,I + E'.$$

Numériquement : $E = 100\ V$, $x = 2\ \Omega$, $y = 2\ \Omega$, $z = 1\ \Omega$ $I = 15\ A$.

La force contre-électromotrice du moteur est

$$E' = 100 - (2 + 2 + 1)\ 15, \qquad \mathbf{E' = 25\ V.}$$

Sa puissance est

$$P' = 25 \times 15, \qquad \mathbf{P' = 375\ W.}$$

L'indication du voltmètre branché à ses bornes serait

$$V = 1 \times 15 + 25, \qquad \mathbf{V = 40\ V.}$$

CHAPITRE XVIII

Courants dérivés

(CIRCUITS NE RENFERMANT QUE DES RÉSISTANCES MORTES).

72. — Circuit comprenant trois résistances en dérivation entre deux points.

Un courant d'intensité égale à 24 ampères se divise en trois branches, AMB, ANB, APB, entre deux points A et B; ces branches sont formées de fils métalliques. Sachant qu'en 7 minutes il se dégage 36 000 calories dans la branche AMB, 18 000 calories dans ANB, 90 000 calories dans APB, calculer :

1° les intensités des courants qui passent dans les trois branches ;

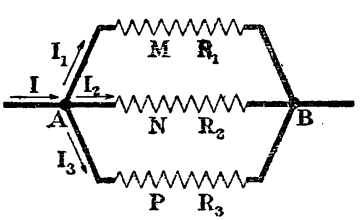
2° les résistances des trois fils qui les constituent ;

3° la différence de potentiel entre A et B.
On prendra 4,2 joules pour l'énergie équivalente à 1 calorie.

(Caen.)

1° Désignons par I, I_1, I_2 et I_3 les intensités du courant principal et des courants dérivés. Ces courants étant de même sens nous avons, par application de la première loi des courants dérivés (loi des intensités),

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \qquad (1)$$



La d.d.p. $V_A - V_B$ a la même valeur quelle que soit la dérivation empruntée par le courant (deuxième loi ou loi des tensions) ; si nous posons $V_A - V_B = V$, l'énergie mise en jeu par le courant dans chacune des trois dérivations durant le temps t a respectivement pour valeur

$$VI_1t, \quad VI_2t, \quad VI_3t.$$

Cette énergie apparaît uniquement sous forme calorifique.

q_1, q_2 et q_3 étant les quantités de chaleur, en calories, dégagées dans les trois dérivations, leur équivalent en joules est $4{,}2 \times q_1$, $4{,}2 \times q_2$, $4{,}2 \times q_3$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} V\,I_1 t = 4{,}2 \times q_1, \\ V\,I_2 t = 4{,}2 \times q_2, \\ V\,I_3 t = 4{,}2 \times q_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Le système d'équations (1) et (2) permet de déterminer les trois inconnues I_1, I_2 et I_3, connaissant I, q_1, q_2 et q_3.

Le système (2) donne, en isolant la quantité $\frac{4{,}2}{Vt}$,

$$\frac{I_1}{q_1} = \frac{I_2}{q_2} = \frac{I_3}{q_3} = \frac{4{,}2}{Vt},$$

ou encore,

$$\frac{I_1}{q_1} = \frac{I_2}{q_2} = \frac{I_3}{q_3} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{q_1 + q_2 + q_3}.$$

En tenant compte de (1) nous obtenons finalement :

$$I_1 = I\,\frac{q_1}{q_1 + q_2 + q_3}, \quad I_2 = I\,\frac{q_2}{q_1 + q_2 + q_3}, \quad I_3 = I\,\frac{q_3}{q_1 + q_2 + q_3}$$

Application numérique : $I = 24$ A, $q_1 = 36\,000$ cal, $q_2 = 18\,000$ cal, $q_3 = 90\,000$ cal, $q_1 + q_2 + q_3 = 144\,000$ cal.

$$I_1 = 24 \times \frac{36\,000}{144\,000}, \qquad \mathbf{I_1 = 6\ A.}$$

$$I_2 = 24 \times \frac{18\,000}{144\,000}, \qquad \mathbf{I_2 = 3\ A.}$$

$$I_3 = 24 \times \frac{90\,000}{144\,000}, \qquad \mathbf{I_3 = 15\ A.}$$

2° Les résistances R_1, R_2 et R_3 des trois fils constituant les dérivations peuvent être obtenues par l'application de la loi de Joule à chacune d'elles. D'après cette loi nous avons :

$$R_1 I_1^2 t = 4{,}2 \times q_1, \quad \text{d'où} \quad R_1 = \frac{4{,}2 \times q_1}{I_1^2 t}.$$

$$R_2 I_2^2 t = 4{,}2 \times q_2, \quad \text{d'où} \quad R_2 = \frac{4{,}2 \times q_2}{I_2^2 t}.$$

$$R_3 I_3^2 t = 4{,}2 \times q_3, \quad \text{d'où} \quad R_3 = \frac{4{,}2 \times q_3}{I_3^2 t}.$$

Application numérique :

$$q_1 = 36\,000 \text{ cal}, \quad q_2 = 18\,000 \text{ cal}, \quad q_3 = 90\,000 \text{ cal}.$$
$$I_1 = 6 \text{ A}, \quad I_2 = 3 \text{ A}, \quad I_3 = 15 \text{ A}, \quad t = 7 \text{ mn ou } 420 \text{ s}.$$

$$R_1 = \frac{4{,}2 \times 36\,000}{6^2 \times 420}, \qquad \mathbf{R_1 = 10\ \Omega.}$$

$$R_2 = \frac{4{,}2 \times 18\,000}{3^2 \times 420}, \qquad \mathbf{R_2 = 20\ \Omega.}$$

$$R_3 = \frac{4{,}2 \times 90\,000}{15^2 \times 420}, \qquad \mathbf{R_3 = 4\ \Omega.}$$

3° La d.d.p. entre A et B, $V_A - V_B = V$, est donnée par le système (2). En additionnant membre à membre ces équations, nous avons

$$V\ (I_1 + I_2 + I_3)t = 4{,}2\ (q_1 + q_2 + q_3).$$

En tenant compte de (1) nous obtenons

$$V = \frac{4{,}2\ (q_1 + q_2 + q_3)}{It}.$$

Application numérique : $q_1 + q_2 + q_3 = 144\,000$ cal, $I = 24$ A, $t = 7$ mn ou 420 s.

$$V = \frac{4{,}2 \times 144\,000}{24 \times 420}.$$

$$\mathbf{V = 60 \text{ volts}.}$$

Vérification : Nous devons avoir, par application de la loi d'Ohm à chaque branche de la dérivation,

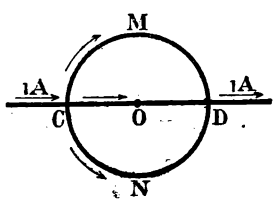
$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3.$$

Nous retrouvons bien ces égalités en remplaçant toutes les lettres par les valeurs numériques déjà calculées.

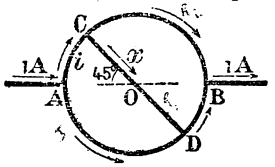
73. — Intensité du courant dans un « pont » reliant deux dérivations, pour une position quelconque de ce pont.

1° Un fil métallique, de résistance 1 ohm par mètre, a la forme d'une circonférence O de rayon 1 m.

Deux points diamétralement opposés, C et D, sont réunis par un fil rectiligne de résistance 1 ohm par mètre. Un courant de 1 ampère arrive en C, se partage entre les trois conducteurs CMD, COD et CND et sort en D. On demande l'intensité du courant qui passe dans le conducteur rectiligne CD.



2° Le courant de 1 ampère arrive au point A et sort au point diamétralement opposé, B ; les deux diamètres AB et CD font entre eux un angle de 45°. On désigne par i le courant qui passe dans le conducteur AC, par x le courant qui passe dans le conducteur CD.

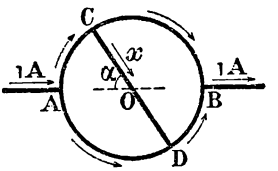


a) Exprimer en fonction de i et de x les courants qui circulent dans les conducteurs AD, DB et CB.

b) Montrer que les conducteurs AC et DB sont parcourus par des courants de même intensité et qu'il en est de même pour les conducteurs AD et CB.

3° Calculer x pour une position quelconque du conducteur diamétral CD définie par l'angle de AB et CD égal à α.

Appliquer la formule obtenue aux trois cas suivants : $\alpha = 0$; $\alpha = 45°$; $\alpha = 90°$.



(*Montpellier.*)

1° Soit I_1, I_2 et I_3 les intensités dans les trois dérivations; R_1, R_2 et R_3 les résistances de ces dérivations (fig. 1).

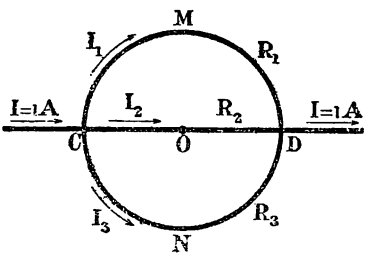


FIG. 1.

Par application de la première loi des courants dérivés (loi des intensités), nous avons

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \quad (1)$$

Par application de la seconde loi (loi des tensions) et en écrivant la loi d'Ohm pour une résistance morte dans les trois cas, nous avons

$$V_C - V_D = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 \quad (2)$$

Exprimons I_1 et I_3 en fonction de I_2 :

$$I_1 = \frac{R_2 I_2}{R_1}, \quad I_3 = \frac{R_2 I_2}{R_3}.$$

Portons ces valeurs dans (1) :

$$I = \frac{R_2 I_2}{R_1} + I_2 + \frac{R_2 I_2}{R_3} = I_2 \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_2} + \frac{R_2}{R_3} \right).$$

$$I = I_2 R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

Si nous posons $\frac{I}{R} = \frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} + \frac{I}{R_3}$ (R étant la résistance équivalente aux trois résistances mortes) nous avons

$$I_2 = I \times \frac{R_2}{R}.$$

Application numérique :

$R_1 = R_3 =$ résistance d'un fil de π mètres $= \pi$ ohms ;
$R_2 =$ résistance d'un fil de 2 mètres $= 2$ ohms, $I = 1$ A.

$$\frac{I}{R} = \frac{I}{\pi} + \frac{I}{2} + \frac{I}{\pi} = \frac{4+\pi}{2\pi},$$

$$I_2 = 1 \times \frac{2\pi}{2(4+\pi)} = \frac{\pi}{4+\pi}, \qquad \mathbf{I_2 = 0{,}439\ A.}$$

2° *a*) Désignons par i_{AD}, i_{DB} et i_{CB} les intensités dans les conducteurs AD, DB et CB (fig. 2).

Si nous appliquons successivement la loi des intensités aux dérivations en A, en D et en B, nous obtiendrons

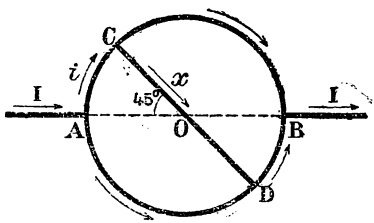


FIG. 2.

en A : $I = i + i_{AD}$,
d'où $i_{AD} = I - i$;

en D : $x + i_{AD} = i_{DB}$,
d'où $i_{DB} = x + I - i$;

en B : $i_{DB} + i_{CB} = I$, d'où $i_{CB} = I - i_{DB} = I - (x + I - i)$,
$i_{CB} = i - x$.

Numériquement : $I = 1$ A.
$i_{AD} = 1 - i$. $i_{DB} = x + 1 - i$. $i_{CB} = i - x$.

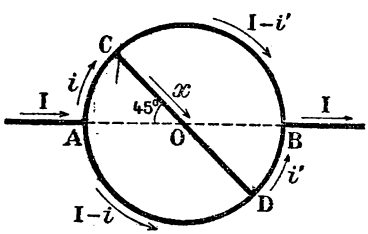


FIG. 3.

b) Posons $i_{DB} = i'$. La figure 3 indique la répartition du courant dans les différents tronçons du circuit. Soit r_1 la résistance de AC ; celle de CB sera $R_1 - r_1$. DB, dont la longueur est celle de AC, aura la même résistance r_1 ; AD, dont la longueur est celle de CB, aura la même résistance $R_1 - r_1$.

Écrivons, pour les deux dérivations ACB et ADB, l'égalité des d.d.p. :

$$(V_A - V_C) + (V_C - V_B) = (V_A - V_D) + (V_D - V_B).$$
$$r_1 i + (R_1 - r_1)(I - i') = (R_1 - r_1)(I - i) + r_1 i'.$$

Après simplification nous trouvons

$$R_1 i = R_1 i',$$

ou

$$i = i'.$$

Le courant dans DB a donc la même intensité que dans AC.

Dans les conducteurs AD et CB les intensités, qui ont pour valeur respective $I - i$ et $I - i'$, sont aussi égales.

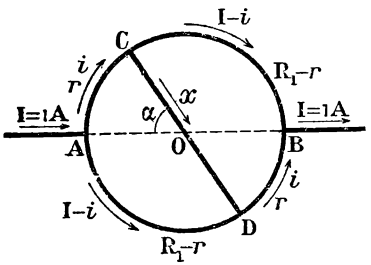


FIG. 4.

Ces résultats sont indépendants de r_1. La donnée du problème, $\widehat{AOC} = 45^0$, est inutile.

3° Pour une position quelconque, de CD les intensités et résistances ont la repartition donnée par la figure 4. L'intensité x du courant dans CD s'obtient à partir de la d.d.p. entre C et D :

$$V_C - V_D = R_2 x.$$

Exprimons autrement cette d.d.p. Pour la dérivation CAD nous avons

$$V_C - V_D = (V_C - V_A) + (V_A - V_D) = (V_A - V_D) - (V_A - V_C),$$

$$R_2 x = (R_1 - r)(I - i) - r i,$$

$$R_2 x = (R_1 - r) I - R_1 i. \qquad (3)$$

Exprimons r en fonction de α. Le fil ACB a une résistance R_1; la portion de ce fil AC dont la longueur est la fraction $\frac{\alpha}{\pi}$ de la longueur ACB a pour résistance la même fraction de R_1 :

$$r = \frac{R_1 \alpha}{\pi}.$$

Exprimons aussi i en fonction de x. Si nous considérons la dérivation en C, nous avons, en vertu de la première loi des courants dérivés,

$$i = x + I - i,$$

d'où

$$i = \frac{x + I}{2}.$$

L'expression (3) s'écrit alors

$$R_2 x = \left(R_1 - \frac{R_1 \alpha}{\pi}\right) I - R_1 \frac{x + I}{2},$$

ou

$$\left(R_2 + \frac{R_1}{2}\right) x = \left(\frac{R_1}{2} - \frac{R_1 \alpha}{\pi}\right) I.$$

Nous tirons de cette équation la valeur de x cherchée :

$$x = \frac{R_1}{\pi} \times \frac{\pi - 2\alpha}{2R_2 + R_1} \times I. \qquad (4)$$

Application numérique : $R_1 = \pi\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $I = 1$ A.

$$x = \frac{\pi}{\pi} \times \frac{\pi - 2\alpha}{4 + \pi} \times 1.$$

$$x = \frac{\pi - 2\alpha}{4 + \pi} \text{ A.}$$

$\alpha = 0.$ $\qquad x = \dfrac{\pi}{4 + \pi},$ $\qquad x = \mathbf{0{,}43}$ **A.**

$\alpha = 45^0$ ou $\dfrac{\pi}{4}$ $\qquad x = \dfrac{\pi - \dfrac{2\pi}{4}}{4 + \pi},$ $\qquad x = \mathbf{0{,}220}$ **A.**

$\alpha = 90^0$ ou $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad x = \dfrac{\pi - 2\dfrac{\pi}{2}}{4 + \pi},$ $\qquad x = \mathbf{0}.$

REMARQUE. — L'expression (4) montre que x est positif si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et négatif si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Dans le premier cas, la d.d.p. $V_C - V_D$ est positive : le courant circulant dans le conducteur CD a le sens indiqué sur la figure 4.

Dans le second cas, la d.d.p. $V_C - V_D$ est négative : le courant circulant dans le conducteur CD a le sens inverse.

L'appareil peut servir de potentiomètre inverseur de courant.

74. — Circuit comprenant n lampes identiques placées en dérivation entre deux points.

1° Entre deux points A et B d'un circuit existe une différence de potentiel constante et égale à 110 volts. Entre ces points, on installe en dérivation n lampes identiques ayant chacune pour résistance 220 ohms.

Calculer, en fonction de n :
l'intensité du courant dans chaque lampe ;
l'intensité du courant total ;
la puissance électrique dépensée entre les deux points A et B.

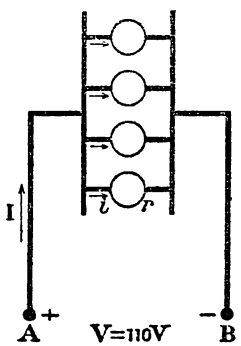
2° Les fils qui amènent le courant à chacune des lampes sont réunis, d'une part au point A, d'autre part à un point B′. B′ est en communication avec B par l'intermédiaire d'une résistance fixe de 220 ohms.

Comment varient l'intensité du courant dans chaque lampe et la puissance électrique totale dépensée entre A et B′ lorsqu'on place en dérivation entre ces deux points successivement 1, 2, 3,..., n des lampes précédentes ? Que doit-il en résulter pour l'intensité de l'éclairage total fourni par les lampes ?

(Pondichéry.)

1° Chaque lampe étant soumise à la d.d.p. V et ayant une résistance r, l'intensité i du courant qui la traverse satisfait à la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V = ri.$$



Cette relation donne

$$i = \frac{V}{r}. \qquad (1)$$

L'intensité dans chaque lampe est indépendante du nombre de lampes en service.

L'intensité I du courant total est donnée par la première loi des courants dérivés (loi des intensités) : c'est la somme des intensités dans les n dérivations :

$$I = ni = n\frac{V}{r}.$$

La puissance électrique P, dépensée entre A et B, est n fois la puissance dépensée dans chaque lampe.

Pour chaque lampe cette puissance vaut $ri^2 = \frac{V^2}{r}$.

$$P = n\frac{V^2}{r}.$$

Application numérique : $V = 110$ volts, $r = 220\ \Omega$.

$$i = \frac{110}{220}, \qquad i = 0{,}5 \text{ A}.$$

$$I = n \times \frac{110}{220}, \qquad I = 0{,}5\,n \text{ A}.$$

$$P = n \times \frac{110^2}{220}, \qquad P = 55\,n \text{ W}.$$

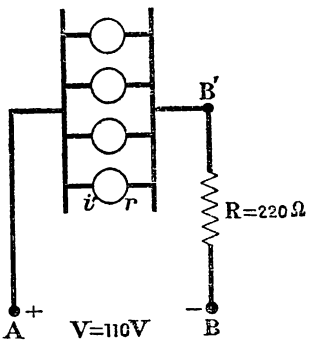
2° La différence de potentiel aux bornes de chaque lampe n'a plus la valeur V mais une valeur $V_A - V_{B'} = V'$.

L'intensité dans chaque lampe est alors

$$i' = \frac{V'}{r}$$

et dans la ligne

$$I' = n i'.$$



Écrivons que la somme des d.d.p. pour les diverses portions en série d'un circuit est égale à la d.d.p. entre les extrémités :

$$V_A - V_B = (V_A - V_{B'}) + (V_{B'} - V_B)$$

ou

$$V = V' + RI' = ri' + Rni'.$$

Cette équation donne l'intensité i' dans chaque lampe :

$$i' = \frac{V}{r + Rn}.$$

Elle diminue lorsque le nombre n de lampes en service augmente.

La puissance électrique totale P' dépensée entre A et B' est égale à n fois la puissance dépensée dans chaque lampe.

Cette puissance par lampe a pour valeur $ri'^2 = \frac{r V^2}{(r + Rn)^2}$.

$$P' = n \frac{r V^2}{(r + Rn)^2}.$$

Elle diminue lorsque le nombre n de lampes en service augmente.

Application numérique : V = 110 volts, $r = 220\ \Omega$, $R = 220\ \Omega$.

$$i' = \frac{110}{220 + 220n}, \qquad i' = \frac{0{,}5}{1 + n}\ \text{A}.$$

$$P' = n \times \frac{220 \times 110^2}{(220 + 220n)^2}, \qquad P' = \frac{55n}{(1 + n)^2}$$

Pour 1 lampe : $i' = \frac{0{,}5}{2} = \frac{i}{2}$ A, $\quad P' = \frac{55}{4}$ W ;

pour 2 lampes : $i' = \frac{0{,}5}{3} = \frac{i}{3}$ A, $\quad P' = \frac{55 \times 2}{9}$ W ;

pour 99 lampes : $i' = \frac{0{,}5}{100} = \frac{i}{100}$ A, $\quad P' = \frac{55 \times 99}{10\,000}$ W,

L'intensité dans chaque lampe et la puissance électrique totale dépensée dans l'ensemble des lampes diminuent donc très rapidement lorsque le nombre des lampes augmente, contrairement au cas précédent où cette intensité restait constante et où cette puissance augmentait avec le nombre de lampes.

Quand le nombre des lampes en service augmente, la résistance $\frac{r}{n}$ de l'ensemble diminue. Mais, à cause de la résistance R de la ligne, le courant I′ est limité et le courant i' dans chaque lampe diminue obligatoirement.

La puissance lumineuse de chaque lampe diminue en conséquence; chaque lampe éclaire de moins en moins.

Pour une certaine valeur de n le courant i' est insuffisant pour que chaque lampe donne de la lumière. Il est évident que, si l'on prend un nombre n même très élevé de ces lampes, l'intensité de l'éclairage total fourni par toutes ces lampes sera nul.

75. — Lampes de puissances différentes montées en série sous une tension double de leur tension normale.

— Deux lampes électriques portent les indications suivantes :
pour A_1, 110 volts-40 watts ;
pour A_2, 110 volts-100 watts.

1° Quelles sont, en régime normal, les résistances de ces deux lampes et les intensités qui les traversent ?

2° Quel est le prix de revient de 10 heures d'éclairage avec chacune des lampes, sachant que le prix du kilowatt-heure est 0,25 franc ?

3° On dispose seulement d'une tension de 220 volts et, pour utiliser ces lampes, on songe d'abord à les mettre en série. Calculer quelle serait dans ce cas l'intensité traversant ces lampes, en supposant que leur résistance est invariable. Calculer les tensions aux bornes de chacune d'elles.

Les deux lampes auront-elles leur aspect normal ? Quel est l'accident auquel on doit s'attendre si l'on fait effectivement l'expérience ?

4° On dispose de plusieurs lampes de chacun des deux types. Indiquer le schéma suivant lequel on devrait monter n_1 lampes de type A_1 et n_2 lampes du type A_2, les lampes de chaque groupe étant en parallèle et les deux groupes étant en série pour que, l'ensemble étant alimenté par une tension de 220 volts, les lampes, fonctionnent cependant dans leurs conditions normales. Quelles sont les valeurs minimales de n_1 et n_2 ?

(Besançon.)

1° La lampe A_1 marquée 110 volts-40 watts fonctionne en régime normal sous une d.d.p. $V = 110$ volts et consomme sous forme calorifique une puissance $P_1 = 40$ watts.

Cette puissance peut s'exprimer de deux façons :

soit à partir de la définition de la d.d.p. :

$$P_1 = V I_1, \qquad (1)$$

soit à partir de la loi de Joule :

$$P_1 = R_1 I_1^2 \qquad (2)$$

En éliminant l'intensité I_1 entre ces deux équations nous obtenons la résistance R_1 de la lampe A_1 :

$$R_1 = \frac{V^2}{P_1}.$$

La résistance R_2 de la lampe A_2 est donnée par l'expression analogue :

$$R_2 = \frac{V^2}{P_2}$$

L'intensité I_1 dans la lampe A_1 est donnée par la formule (1):

$$I_1 = \frac{P_1}{V}.$$

L'intensité I_2 dans la lampe A_2 est donnée par l'expression analogue

$$I_2 = \frac{P_2}{V}.$$

Application numérique : $V = 110$ V, $P_1 = 40$ W, $P_2 = 100$ W.

$$R_1 = \frac{110^2}{40}, \qquad R_1 = 302{,}5\ \Omega.$$

$$R_2 = \frac{110^2}{100} \qquad R_2 = 121\ \Omega.$$

$$I_1 = \frac{40}{110} \qquad I_1 = 0{,}364\ \text{A}.$$

$$I_2 = \frac{100}{110}, \qquad I_2 = 0{,}909\ \text{A}.$$

2° Le prix de revient de l'éclairage pendant un certain temps t, à raison de f francs par kWh, s'obtient en multipliant f par la consommation d'énergie exprimée en kWh.

Pour la lampe A_1 dont la puissance est $\frac{P_1}{1\,000}$ kilowatts et pour une durée de t heures l'énergie en kWh est $\frac{P_1}{1\,000} \times t$.

Le prix de revient ou dépense est dans ces conditions

$$D_1 = f \times \frac{P_1}{1\,000} \times t.$$

De même, la dépense pour la lampe A_2, est, dans les mêmes conditions,

$$D_2 = f \times \frac{P_2}{1\,000} \times t.$$

Application numérique : $f = 0{,}25$ F, $P_1 = 40$ W, $P_2 = 100$ W, $t = 10$ h.

$$D_1 = 0{,}25 \times \frac{40}{1\,000} \times 10, \qquad \mathbf{D_1 = 0{,}10\ F.}$$

$$D_2 = 0{,}25 \times \frac{100}{1\,000} \times 10 \qquad \mathbf{D_2 = 0{,}25\ F.}$$

3° Si les deux lampes A_1 et A_2 étaient disposées en série sous la tension V' elles seraient parcourues par un même courant d'intensité I', qui satisferait à la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V' = (R_1 + R_2)\, I'.$$

L'intensité I' aurait pour valeur, en prenant pour R_1 et R_2 les valeurs précédentes,

$$I' = \frac{V'}{R_1 + R_2} = \frac{V'}{\frac{V^2}{P_1} + \frac{V^2}{P_2}} \quad \text{ou} \quad I' = \frac{V'}{V^2} \times \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2}.$$

Les d.d.p. aux bornes de A_1 et A_2 auraient respectivement pour valeur

$$V_1 = R_1 I', \quad \text{ou} \quad V_1 = V' \times \frac{P_2}{P_1 + P_2},$$

et

$$V_2 = R_2 I', \quad \text{ou} \quad V_2 = V' \times \frac{P_1}{P_1 + P_2}.$$

Application numérique :

$$V = 110\ V, \quad V' = 220\ V, \quad P_1 = 40\ W, \quad P_2 = 100\ W.$$

$$I' = \frac{220}{110^2} \times \frac{40 \times 100}{40 + 100}, \qquad \mathbf{I' = 0{,}519\ A.}$$

$$V_1 = 220 \times \frac{100}{40 + 100}, \qquad \mathbf{V_1 = 157\ V.}$$

$$V_2 = 220 \times \frac{40}{40 + 100}, \qquad \mathbf{V_2 = 62{,}8\ V.}$$

Dans ce montage, la lampe A_1 serait survoltée : elle éclairerait trop; la lampe A_2 serait sousvoltée: elle n'éclairerait pas assez. Aucune des deux lampes n'aurait son aspect normal.

Si l'on fait effectivement l'expérience, la lampe A_2 traversée par un courant plus faible que le courant qu'elle peut supporter normalement ne subira aucun dommage, tandis que la lampe A_1, traversée par un courant 1,7 fois plus fort que le courant normal, sera « grillée ».

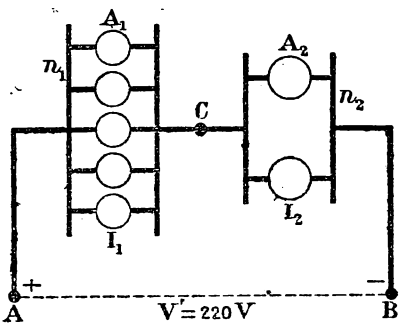
4° Si l'on effectue un premier groupement en parallèle de n_1 lampes de type A_1 et un deuxième groupement en parallèle de n_2 lampes de type A_2, et si l'on met en série ces deux groupes sous la d.d.p. $V' = 2V$, on peut retrouver un fonctionnement normal de ces lampes. Chacune des lampes A_1 devra être parcourue par un courant I_1, et chacune des lampes A_2 par un courant I_2.

La d.d.p. aux bornes de chacune des lampes A_1 sera

$$R_1 I_1 = V.$$

Aux bornes de chacune des lampes A_2, elle sera aussi

$$R_2 I_2 = V.$$



Le courant dans la ligne aura la même intensité entre A et C et entre C et B :

$$n_1 I_1 = n_2 I_2 ;$$

en tenant compte des valeurs normales de I_1 et I_2 nous avons

$$n_1 \frac{P_1}{V} = n_2 \frac{P_2}{V} .$$

Nous en tirons

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{P_2}{P_1} .$$

Il existe une infinité de combinaisons de n_1 et n_2 qui satisfont à cette condition.

Application numérique : $P_1 = 40$ W, $P_2 = 100$ W.

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2} .$$

Les valeurs minimales de n_1 et n_2 qui satisfont à cette condition sont

$$n_1 = 5 \qquad \text{et} \qquad n_2 = 2.$$

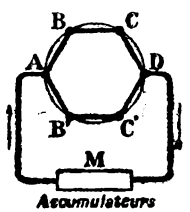
Les valeurs $n_1 = 10$ et $n_2 = 4$ y satisfont aussi, ainsi que $n_1 = 15$ et $n_2 = 6$.

D'une manière générale on pourra avoir simultanément, k étant un nombre entier,

$$n_1 = k \times 5 \qquad \text{et} \qquad n_2 = k \times 2.$$

76. — Circuit fermé résistant avec dérivations.

Sur un cercle en bois de 25 cm de rayon se trouvent à 60° les unes des autres des chevilles en ébonite permettant de maintenir tendu de l'une à l'autre un fil de cuivre dont la résistance par mètre est 0,014 ohm. On relie les points A et D à une batterie d'accumulateurs composée de 5 éléments dont chacun a une f. é. m. de 1,8 volt.



La résistance du circuit AMD est 8 994 750 microhms.

1° Calculer l'intensité du courant dans la branche AMD et dans les branches ABCD, AB'C'D.

2° Si l'on relie A et D par un fil tendu identique aux fils déjà employés, quelle résistance additionnelle faudra-t-il placer dans le parcours AMD pour que le courant ait dans AMD la même intensité que précédemment ?

Calculer dans ces conditions l'intensité du courant dans AD et dans les branches ABCD et AB'C'D entre lesquelles se divise le courant qui arrive en A.

(Lille.)

1° Soit I, I_1 et I_2 les intensités des courants dans les branches AMB, ABCD et AB'C'D.

Ces intensités satisfont aux lois des courants dérivés.

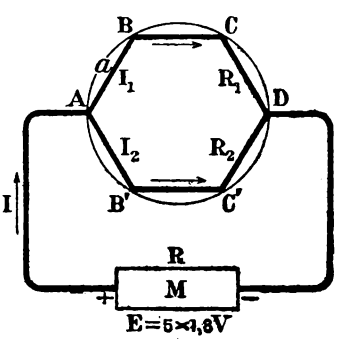
La loi des intensités donne la relation

$$I = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

Celle des tensions donne

$$V_A - V_D = R_1 I_1 = R_2 I_2. \quad (2)$$

Si nous connaissons $V_A - V_D$, R_1 et R_2, nous pouvons résoudre ce système de trois équations à trois inconnues.



La d.d.p. $V_A - V_D$ est donnée par la loi d'Ohm pour une portion de circuit contenant un générateur :

$$V_A - V_D = E - RI.$$

E et R sont deux quantités connues.

D'autre part les dérivations ABCD et AB'C'D ayant la même longueur, $3AB = 3a$, et étant faites avec un même fil dont la résistance par unité de longueur est r, ont des résistances égales. Leur valeur commune est

$$R_1 = R_2 = r_1 \times 3a.$$

Dans ces conditions puisque $R_1 = R_2$ nous avons

$$I_1 = I_2 = \frac{I}{2}.$$

Le système (2) se réduit à l'équation

$$R_1 \frac{I}{2} = E - RI;$$

Nous en tirons

$$I = \frac{E}{R + \frac{R_1}{2}},$$

ou, en remplaçant R_1 par $r_1 \times 3\ a$,

$$I = \frac{E}{R + \frac{r_1 \times 3a}{2}}.$$

Application numérique : $E = 5 \times 1{,}8 = 9$ V, $R = 8\,994\,750\ \mu\Omega$ ou $8{,}994\,750\,\Omega$, $r_1 = 0{,}014$ ohm par mètre, $a = 25$ cm ou 0,25 m.

$$I = \frac{9}{8{,}994\,750 + \frac{0{,}014 \times 3 \times 0{,}25}{2}},$$

$$I = \frac{9}{8{,}994\,750 + 0{,}005\,250},$$

$$\mathbf{I = 1\ A.} \quad \mathbf{I_1 = I_2 = 0{,}5\ A.}$$

2° Soit x la résistance qu'il faut placer dans la branche AMD pour avoir la même intensité, I, que précédemment.

Les mêmes lois donnent le système d'équations analogues

$$I = I'_1 + I'_2 + I'_3. \qquad (3)$$

$$V_A - V_D = R_1 I'_1 = R_2 I'_2 = R_3 I'_3 \qquad (4)$$

Prenant I'_1, I'_2 et I'_3 dans les équations (4) et portant ces valeurs dans (3) nous avons

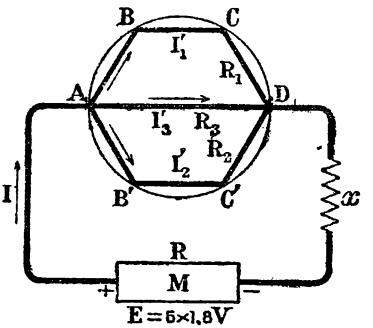
$$I = (V_A - V_D)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right). \qquad (5)$$

La d.d.p. $V_A - V_D$ pour la portion de circuit AMB contenant un générateur est

$$V_A - V_D = E - (R + x)\,I.$$

$$R_1 = R_2 = r_1 \times 3a, \quad R_3 = r_1 \times 2a.$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{r_1 \times 3a} + \frac{1}{r_1 \times 3a} + \frac{1}{r_1 \times 2a} = \frac{7}{r_1 \times 6a}.$$



Avec ces valeurs nous obtenons l'équation

$$I = (E - RI - xI)\frac{7}{r_1 \times 6a},$$

d'où

$$x = \frac{E}{I} - R - \frac{r_1 \times 6a}{7}.$$

Les valeurs de I'_1, I'_2 et I'_3 sont alors données par les équations (4) dans lesquelles $V_A - V_D = E - RI - xI = \frac{r_1 \times 6a}{7} I$.

$$I'_1 = I'_2 = \frac{V_A - V_D}{R_1} = \frac{r_1 \times 6a \times I}{7 \times r_1 \times 3a} = \frac{2I}{7},$$

$$I'_3 = \frac{V_A - V_D}{R_3} = \frac{r_1 \times 6a \times I}{7 \times r_1 \times 2a} = \frac{3I}{7}.$$

Application numérique : $E = 9$ V, $I = 1$ A,

$R = 8{,}994\,750\ \Omega$, $r_1 = 0{,}014$ ohm par mètre, $a = 0{,}25$ m.

$$x = \frac{9}{1} - 8{,}994\,750 - \frac{0{,}014 \times 6 \times 0{,}25}{7},$$

$$x = 9 - 8{,}994\,750 - 0{,}003\,000.$$

$$x = \mathbf{0{,}002\,250\ \Omega}.$$

$$I'_1 = I'_2 = \frac{2 \times 1}{7}, \qquad \mathbf{I'_1 = I'_2 = 0{,}286\ A.}$$

$$I'_3 = \frac{3 \times 1}{7}, \qquad \mathbf{I'_3 = 0{,}428\ A.}$$

Remarque. — L'équation (5) revient à écrire la loi d'Ohm pour la résistance équivalente aux trois résistances mortes en dérivation. x s'obtient alors immédiatement.

CHAPITRE XIX

Appareils de mesure. Shunts.

77. — Galvanomètre shunté. Calcul des intensités. Précision.

Dans un circuit électrique parcouru par un courant d'intensité invariable I est intercalé un galvanomètre de résistance g. La déviation du spot est n divisions, de l'échelle graduée.

On place, en dérivation aux bornes du galvanomètre, un shunt de résistance s. La déviation du spot est n' divisions.

1° Calculer la résistance g, connaissant la résistance s et le rapport $\frac{n}{n'} = k$.

Application numérique : $s = 100$ ohms, $k = 6$.

2° Calculer les intensités des courants dans le shunt et dans le galvanomètre.

Application numérique : I = 18 milliampères.

3° Quelle est la différence de potentiel aux bornes du galvanomètre ?

4° Sachant qu'on peut lire les graduations de l'échelle à $\frac{1}{10}$ de division près, avec quelle approximation pourra-t-on mesurer les intensités de courant avec ou sans le shunt ? On donne $n = 90$ divisions.

5° Quelle est la quantité de chaleur dégagée dans le shunt pendant dix minutes?

(Rennes.)

1° Le galvanomètre non shunté (*fig.* 1) est parcouru par un courant d'intensité I proportionnelle à la déviation n :

$$I = Kn.$$



FIG. 1.

L'intensité dans le circuit principal étant encore I, le galvanomètre est muni de son shunt (*fig.* 2). Dans ces conditions le galvanomètre est parcouru par un courant d'intensité I' proportionnelle à la déviation n',

$$I' = Kn',$$

tandis que le shunt est parcouru par un courant d'intensité I″. Appliquons à la dérivation galvanomètre-shunt les deux lois des courants dérivés.

La loi des intensités donne

$$I = I' + I'' \qquad (1)$$

et celle des tensions,

$$g\,I' = s\,I''. \qquad (2)$$

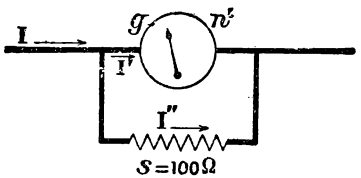


FIG. 2.

Éliminons I″ entre ces équations

$$I = I' + \frac{g}{s}I' = \left(1 + \frac{g}{s}\right)I'.$$

$$\frac{I}{I'} = 1 + \frac{g}{s}.$$

Cette équation donne g :

$$g = s\left(\frac{I}{I'} - 1\right).$$

En tenant compte des deux relations $I = Kn$ et $I' = Kn'$ nous avons

$$g = s\left(\frac{n}{n'} - 1\right),$$

ou

$$g = s\,(k - 1). \qquad (3)$$

Application numérique : $s = 100\ \Omega$, $k = 6$.

$$g = 100\,(6 - 1), \qquad \mathbf{g = 500\ \Omega.}$$

2° L'intensité du courant dans le shunt, I″, s'obtient en éliminant I′ entre (1) et (2) :

$$I = \frac{s}{g}I'' + I'' = \left(\frac{s}{g} + 1\right)I''.$$

$$I'' = \frac{I}{\frac{s}{g} + 1}.$$

L'équation (3) donne $\frac{s}{g} + 1 = \frac{1}{k-1} + 1 = \frac{k}{k-1}$.

$$I'' = \frac{k-1}{k} I.$$

L'intensité dans le galvanomètre, I', s'obtient à partir des expressions $I = Kn$ et $I' = Kn'$:

$$\frac{I'}{I} = \frac{n'}{n} = \frac{1}{k},$$

$$I' = \frac{I}{k}.$$

Application numérique : $I = 18$ mA, $k = 6$.

$$I'' = \frac{6-1}{6} \times 18, \qquad \mathbf{I'' = 15\ mA.}$$

$$I' = \frac{18}{6}, \qquad \mathbf{I' = 3\ mA.}$$

3° La d.d.p. aux bornes du galvanomètre, V, est donnée par la loi d'Ohm appliquée à l'une ou l'autre des dérivations :

$$V = g\, I' = s\, I'',$$

$$V = s \times \frac{k-1}{k} I.$$

Application numérique : $s = 100\ \Omega$, $k = 6$, $I = 18$ mA

$$V = 100 \times \frac{6-1}{6} \times 18,$$

$$V = 1\,500\ \text{mV}, \qquad \mathbf{V = 1{,}5\ volt.}$$

4° Lorsqu'on utilise le shunt on lit une déviation n' et une intensité $I' = Kn' = \frac{I}{k}$.

L'intensité I dans le circuit principal est, en fonction de n',

$$I = k\, Kn'.$$

k étant une constante ainsi que K, l'erreur relative sur I est

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta n'}{n'}.$$

L'erreur de lecture $\Delta n'$ a la même valeur, Δn, qu'en l'absence de shunt. D'autre part la déviation n' avec le shunt est $\frac{n}{k}$, n étant la déviation en l'absence de shunt.

Nous avons donc

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta n}{\frac{n}{k}} = k\frac{\Delta n}{n}.$$

L'incertitude sur I est donc

$$\Delta I = k\frac{\Delta n}{n} I.$$

Lorsqu'on n'utilise pas le shunt on lit une déviation n et une intensité $I = Kn$.

L'erreur relative sur I est alors

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta n}{n},$$

et l'incertitude sur I est

$$\Delta I = \frac{\Delta n}{n} I.$$

La mesure de I quand on utilise le shunt est donc moins précise que lorsqu'on utilise le galvanomètre seul.

Application numérique : $n = 90$, $\Delta n = \Delta n' = 0{,}1$, $k = 6$, $I = 18$ m A.

Galvanomètre shunté : $\Delta I = 6 \times \frac{0{,}1}{90} \times 18$, $\quad \Delta I = \mathbf{0{,}12}$ **m A.**

Galvanomètre non shunté : $\Delta I = \frac{0{,}1}{90} \times 18$, $\quad \Delta I = \mathbf{0{,}02}$ **m A.**

5° La quantité de chaleur q calories dégagée dans le shunt pendant t secondes est donnée par la loi de Joule :

$$q = \frac{s(I'')^2 t}{4{,}18},$$

s étant exprimée en ohms et I'' en ampères.

Application numérique :

$s = 100\ \Omega$, $I'' = 15$ m A ou $0{,}015$ A, $t = 10$ mn ou 600 s.

$$q = \frac{100 \times 0{,}015^2 \times 600}{4{,}18},$$

$$q = \mathbf{3{,}23\ cal.}$$

78. — Graduation d'un ampèremètre par électrolyse. Shuntage de l'appareil.

On veut vérifier la graduation d'un ampèremètre, en se servant d'un phénomène d'électrolyse.

On met en série l'ampèremètre et un voltamètre à nitrate d'argent et l'on y fait passer un courant constant pendant 3 heures 20 minutes. L'aiguille de l'ampèremètre indique pendant ce temps la division 34,5 sur la graduation allant de 0 à 100. La masse d'argent déposée à la cathode à la fin de l'expérience est 0,465 gramme.

1° Faire un schéma du circuit électrique nécessaire pour réaliser l'expérience indiquée.

2° Déduire des données :

a) **quelle est l'intensité de courant qui correspond aux 100 divisions du cadran ;**

b) **que les indications de l'ampèremètre sont exactes avec une erreur inférieure à 1 pour cent.**

3° On désire maintenant utiliser l'ampèremètre précédent pour mesurer des intensités jusqu'à 1 ampère.

Quel conducteur additionnel, AB, faut-il lui adjoindre ?

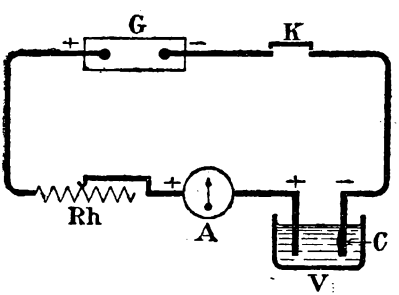
On calculera la résistance de AB, en sachant que la résistance propre de l'ampèremètre est 8,1 ohms.

N. B. — On sait que 96 500 coulombs libèrent une valence-gramme. Masse atomique de l'argent : 108 ; valence : 1.

On admettra que les déplacements de l'aiguille sont proportionnels aux courants qui traversent l'ampèremètre et que les 100 divisions correspondent à un sous-multiple décimal de 1 ampère.

(Montpellier.)

1° Le schéma de principe de l'expérience est représenté ci-contre. On utilise dans un montage en série : un générateur G (batterie d'accumulateurs au plomb de quelques éléments);



un rhéostat Rh destiné à maintenir constante l'intensité du courant pendant la durée de l'expérience;

l'ampèremètre A dont on veut vérifier la graduation;

un voltamètre V, à nitrate d'argent avec électrodes en argent;

un interrupteur K.

Le pôle + du générateur G est relié à la borne o (+) de l'ampèremètre.

On pèse la cathode C avant l'expérience et l'on règle ensuite le rhéostat de manière à avoir une intensité de courant convenable. L'interrupteur K est maintenu fermé pendant le temps *t*. La cathode est de nouveau pesée après ouverture de K. La différence des pesées donne la masse *m* d'argent déposée dans le temps *t*. On en déduit l'intensité I du courant par application de la loi de Faraday.

La vérification étudiée consiste dans la comparaison de la valeur calculée pour I avec la valeur lue sur l'ampèremètre.

2° a) *Calcul de l'intensité qui correspond à la division* 100 *du cadran.*

La masse *m* grammes d'argent déposé par le courant I ampères en *t* secondes est donné par la loi de Faraday :

$$m = \frac{1}{\mathcal{F}} \times \frac{A}{n} \times I \times t.$$

La constante $\mathcal{F}$ représente la quantité d'électricité qui met en liberté une valence-gramme soit $\frac{A}{n}$ grammes d'argent.

La formule précédente donne $I = \frac{m}{\frac{A}{n}} \times \frac{\mathcal{F}}{t}$.

Si l'ampèremètre donne pour cette intensité I une déviation de N divisions, l'intensité I_m correspondant aux 100 divisions de la graduation sera

$$I_m = \frac{I}{N} \times 100,$$

ou

$$I_m = \frac{m}{\frac{A}{n}} \times \frac{\mathcal{F}}{t} \times \frac{100}{N}.$$

Application numérique : $m = 0{,}465$ g, $\frac{A}{n} = \frac{108}{1} = 108$ g.

$\mathcal{F} = 96\,500$ coulombs, $t = 3$ h 20 mn ou 12 000 s, $N = 34{,}5$.

$$I_m = \frac{0{,}465}{108} \times \frac{96\,500}{12\,000} \times \frac{100}{34{,}5}$$

$$\mathbf{I_m = 0{,}100\,3\ A.}$$

b) *Degré d'exactitude de la graduation.*

Les 100 divisions correspondent à un sous-multiple décimal de 1 ampère. Par conséquent l'indication portée par l'ampèremètre pour la division 100 sera 0,1 ampère.

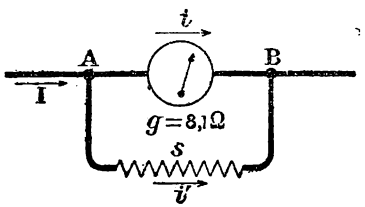
La différence entre la valeur calculée et la valeur indiquée est

$$I_m - 0{,}1 = 0{,}000\,3 \text{ A.}$$

L'écart relatif de ces valeurs est, par rapport à la valeur indiquée,

$$\frac{I_m - 0{,}1}{0{,}1} = \frac{0{,}000\,3}{0{,}1} = \frac{3}{1000}.$$

En portant à l'extrémité de la graduation la valeur 0,1 au lieu de 0,100 3 on commet une erreur relative de $\frac{3}{1000}$, inférieure à $\frac{1}{100}$. Par suite les indications de l'ampèremètre sont exactes avec une erreur inférieure à 1 pour cent.



3° Si l'on veut utiliser cet ampèremètre pour mesurer une intensité $I > I_m$ il faudra n'admettre dans l'appareil qu'une partie $i \leqslant I_m$ du courant I. Le conducteur additionnel AB qui devra être adjoint à l'ampèremètre sera mis en dérivation sur l'ampèremètre : il constituera un shunt.

Appliquons à ce dispositif les deux lois des courants dérivés.

La loi des intensités donne

$$I = i + i',$$

et celle des tensions,

$$gi = si'.$$

En éliminant i' entre ces deux équations nous obtenons

$$gi = s(I - i).$$

Cette relation donne s, connaissant g, I et i.

$$s = \frac{gi}{I - i}.$$

Application numérique : $I = 1$ A, $i = I_m = 0{,}1$ A, $g = 8{,}1\ \Omega$.

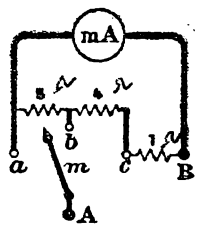
$$s = \frac{8{,}1 \times 0{,}1}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}81}{0{,}9},$$

$$s = \mathbf{0{,}9\ \Omega}.$$

Le courant dans la dérivation sera 9 fois plus intense que dans l'ampèremètre puisque la résistance du shunt est 9 fois plus faible que celle de l'ampèremètre. Autrement dit, on dérivera dans le shunt les $\frac{9}{10}$ du courant total.

79. — Ampèremètre à plusieurs sensibilités. Transformation en voltmètre à plusieurs sensibilités.

On possède un milliampèremètre à cadre mobile de résistance 100 ohms dont le cadre porte 100 divisions. L'aiguille va au bout de l'échelle pour un courant de 1 milliampère. Pour mesurer des courants plus intenses on le shunte par le montage indiqué sur la figure. A et B sont les bornes d'utilisation. m est une manette que l'on peut amener sur les plots a, b, c. Les résistances intercalaires sont indiquées en ohms sur la figure.



1° Pour chacune des trois positions de la manette, a, b et c, par quel facteur faut-il multiplier les indications de l'appareil, n, exprimées en nombre de divisions de 0 à 100 pour connaître l'intensité en milliampères du courant mesuré ?

2° On veut utiliser le même milliampèremètre comme voltmètre pour mesurer des tensions de 0 à 15 volts. Quelle est la résistance que l'on doit mettre en série avec le milliampèremètre pour que l'indication de l'appareil donne un nombre de divisions aussi élevé que possible, le facteur par lequel on doit multiplier ce nombre pour connaître la tension en millivolts étant un nombre entier aussi simple que possible ?

3° On veut utiliser ce même milliampèremètre pour mesurer des tensions comprises entre 0 et 100 000 volts. Pour construire la résistance que l'on doit mettre en série avec le milliampèremètre, on dispose d'éléments résistants de 10 mégohms pouvant au plus dissiper 2,5 watts. Quelle sera la déviation maximale de l'aiguille ? Combien doit-on mettre d'éléments en série ? Quel sera le facteur par lequel on devra multiplier le nombre lu pour avoir la tension en kilovolts ?

(*Besançon.*)

1° Le milliampèremètre non shunté donne une déviation de 100 divisions pour 1 milliampère.

Le dispositif du shuntage permet d'avoir trois sensibilités.

La résistance du shunt a la valeur :

$s_1 = 5 + 4 + 1 = 10\ \Omega$ quand la manette est sur a,
$s_2 = 4 + 1 = 5\ \Omega$ quand elle est sur b,
$s_3 = 1\ \Omega$ quand elle est sur c.

La résistance de la branche contenant le milliampèremètre a la valeur :

$r = r_1 = g = 100\ \Omega$ quand la manette est sur a,
$r = r_2 = 100 + 5 = 105\ \Omega$ quand elle est sur b,
$r = r_3 = 100 + 5 + 4 = 109\ \Omega$ quand elle est sur c.

Connaissant l'intensité i dans le milliampèremètre, les résistances r de la branche du milliampèremètre et s du shunt, il est possible d'avoir I.

Les deux lois des courants dérivés (loi des intensités et lois de tensions) donnent (fig. 1):

$$I = i + i',$$
$$ri = si'.$$

I s'obtient en éliminant i' entre ces deux équations :

$$I = \frac{r+s}{s}\, i.$$

Introduisons le nombre n de divisions de la déviation donnée par l'appareil pour l'intensité i. Si 1 mA correspond à 100 divisions, nous avons

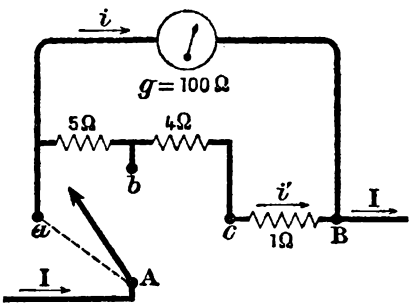


Fig. 1.

$$i = \frac{1 \times n}{100} \text{ mA.}$$

Par suite,

$$I = \frac{r+s}{100\,s}\, n \text{ mA.}$$

Le facteur de multiplication de n qui donne I en mA est K tel que

$$I = Kn.$$

Il a pour valeur $\quad K = \dfrac{r+s}{100\,s}.$ (1)

Application numérique :

$r = r_1 = g = 100\ \Omega, \qquad s = s_1 = 10\ \Omega.$

$$K_1 = \frac{100 + 10}{100 \times 10}, \qquad K_1 = \frac{11}{100}.$$

$r = r_2 = 105\ \Omega, \qquad s = s_2 = 5\ \Omega.$

$$K_2 = \frac{105 + 5}{100 \times 5}, \qquad K_2 = \frac{22}{100}.$$

$r = r_3 = 109\ \Omega, \qquad s = s_3 = 1\ \Omega.$

$$K_3 = \frac{109 + 1}{100 \times 1}, \qquad K_3 = \frac{110}{100}.$$

L'appareil sera utilisable de 0 à 100 K milliampères, c'est-à-dire de 0 à 11 mA, de 0 à 22 mA, de 0 à 110 mA suivant que la manette sera placée sur *a*, sur *b* ou sur *c*.

2° Si l'on met en série avec le milliampèremètre une résistance X et si l'on branche cet ensemble en dérivation entre deux points A et B d'un circuit présentant une d.d.p. V, le milliampèremètre sera traversé par un courant i (fig. 2).

Ecrivons la loi d'Ohm pour une résistance morte :

$$V = (g + X)i.$$

Si nous exprimons i en mA, g et X en Ω, V sera exprimé en mV. i en mA est donné en fonction de n par la relation

$$i = \frac{1 \times n}{100}.$$

Par suite,

$$V = \frac{g + X}{100} n \text{ mV}.$$

Nous pouvons aussi écrire

$$V = K'n \text{ mV}.$$

Le facteur de multiplication est alors

$$K' = \frac{g + X}{100}. \qquad (2)$$

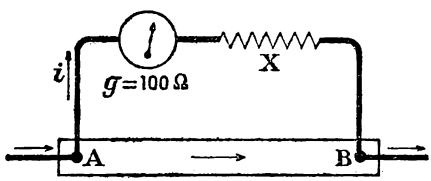


FIG. 2.

L'appareil ainsi modifié constituera un millivoltmètre.
Les dernières relations donnent

$$K' = \frac{V}{n},$$

si nous connaissons des valeurs particulières de V et de n (V_m et 100 par exemple), et

$$X = 100\,K' - g,$$

si nous connaissons K' et g.

Application numérique :

$V = V_m = 15$ V ou 15 000 mV, $n = 100$ divisions, $g = 100$ Ω.

$$K' = \frac{15\,000}{100} = 150,$$

$$X = 100 \times 150 - 100,$$

$$\mathbf{X = 14\,900\ \Omega}.$$

3° Pour transformer le milliampèremètre en kilovoltmètre il faudra mettre en série avec le milliampèremètre une résistance Y.

Nous aurons alors, pour un courant i traversant le milliampèremètre et pour une déviation de n divisions,

$$V = (g + Y)\, i \text{ mV.}$$

ou

$$V = \frac{g + Y}{100}\, n \text{ mV.}$$

Si nous exprimons V en kilovolts il faudra diviser par 10^6 le nombre de millivolts et nous aurons

$$V = \frac{g + Y}{10^8}\, n \text{ kV.} \qquad (3)$$

Déviation maximale de l'aiguille.

La résistance Y est constituée par des éléments de résistance $R = 10 \times 10^6\ \Omega$ pouvant au plus dissiper une puissance $P = 2{,}5$ watts. Cela signifie que le courant i est limité à une valeur maximale i_m, qui satisfait à la loi de Joule :

$$P = R i^2_m.$$

La déviation maximale sera n_m divisions. Mais $i = \frac{1 \times n}{100}$ mA ou $i = \frac{n}{100 \times 1000}$ A. Pour n_m nous aurons $i_m = \frac{n_m}{10^5}$ A et, pour P,

$$P = R\left(\frac{n_m}{10^5}\right)^2.$$

La déviation sera limitée à un nombre de divisions

$$n_m = 10^5 \sqrt{\frac{P}{R}}.$$

Numériquement : $P = 2{,}5$ W, $R = 10$ MΩ ou $10 \times 10^6\ \Omega$.

$$n_m = 10^5 \sqrt{\frac{2{,}5}{10 \times 10^6}}, \qquad n_m = \mathbf{50 \text{ divisions.}}$$

Nombre d'éléments résistants à placer en série.

La résistance à réaliser, Y, satisfait à la condition suivante : la d.d.p. maximale, V_m, donne la déviation maximale n_m ou

$$V_m = \frac{g + Y}{10^8}\, n_m \text{ kV.}$$

La résistance Y étant de l'ordre de $10 \times 10^6\ \Omega$ on peut négliger devant cette valeur la résistance $g = 100\ \Omega$ et l'on peut écrire, V_m étant exprimé en kV,

$$Y = \frac{V_m}{n_m} \times 10^8\ \Omega.$$

Le nombre N d'éléments résistants sera alors

$$N = \frac{Y}{R} = \frac{V_m \times 10^8}{n_m \times R}.$$

Application numérique :

$V_m = 100\,000$ V ou 100 kV, $n_m = 50$, $R = 10 \times 10^6\ \Omega$.

$$N = \frac{100 \times 10^8}{50 \times 10 \times 10^6} \qquad \mathbf{N = 20\ éléments.}$$

Détermination du facteur de multiplication.

La formule (3) s'écrit avec la remarque faite plus haut (g négligeable devant Y)

$$V = \frac{Y}{10^8}\, n = \frac{NR}{10^8}\, n \text{ kV},$$

ou

$$V = K''n \text{ kV}.$$

Le facteur de multiplication cherché est

$$K'' = \frac{NR}{10^8}.$$

Application numérique :

$N = 20$ éléments, $R = 10 \times 10^6\ \Omega$.

$$K'' = \frac{20 \times 10 \times 10^6}{10^8}.$$

$$\mathbf{K'' = 2.}$$

80. — Transformation d'un voltmètre en ampèremètre. Influence de la température sur l'indication de l'appareil.

1° Le cadre mobile d'un millivoltmètre a une résistance de 0,3 ohm et un courant de 50 milliampères suffit pour donner la déviation maximale (100 divisions) sur le cadran. Quelle résistance doit-on placer en série avec le cadre, à l'intérieur du boîtier de l'appareil, pour que la déviation totale corresponde exactement à 40 millivolts ?

2° On désire utiliser cet appareil comme ampèremètre pour mesurer des intensités de courant comprises entre 0 et 1 ampère. Calculer la valeur de la résistance (shunt) qu'il convient d'intercaler entre les bornes.

3° On suppose que la résistance de l'appareil (cadre et résistance à l'intérieur du boîtier) ne varie pas avec la température, mais que le shunt est formé de cuivre

dont la résistance augmente des $\frac{4}{1\,000}$ de sa valeur pour une élévation de température de 1 °C. Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise quand la température s'élève de 10°C au-dessus de celle pour laquelle les indications de l'ampèremètre sont exactes ?

(*Lyon.*)

1° Soit x la résistance additionnelle cherchée (fig. 1). La résistance du voltmètre est $g + x$. La d.d.p., V, qu'il mesure lorsqu'il est parcouru par un courant i est

$$V = (g + x)\, i.$$

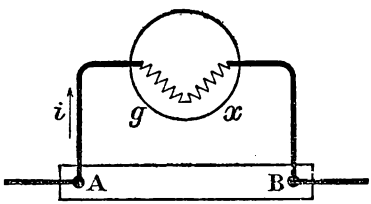


FIG. 1.

g et x étant exprimés en ohms, i en milliampères, V sera exprimé en millivolts. Si l'on connaît la d.d.p., V_m, qui correspond à la déviation totale de l'appareil, i_m, et la résistance, g, du cadre, la résistance x pourra être calculée :

$$x = \frac{V_m}{i_m} - g.$$

Application numérique : $V_m = 40$ mV, $i_m = 50$ mA, $g = 0{,}3\ \Omega$.

$$x = \frac{40}{50} - 0{,}3, \qquad x = \mathbf{0{,}5\ \Omega}.$$

2° Pour utiliser cet appareil comme ampèremètre dans la mesure d'intensités I supérieures à i_m il faudra le shunter par une résistance s (fig. 2).

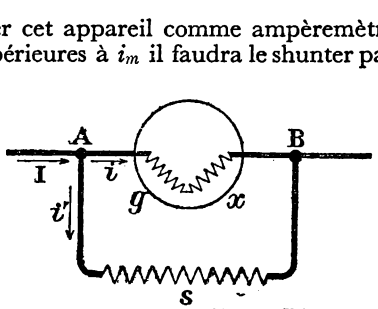


FIG. 2.

L'application à ce dispositif des lois des courants dérivés (loi des intensités et loi des tensions) donne

$$I = i + i',$$
$$(g + x)\, i = s\, i'.$$

En éliminant i' entre ces deux équations nous obtenons

$$I = \left(1 + \frac{g + x}{s}\right) i. \qquad (1)$$

Cette équation permet de calculer s, connaissant g, x et I_m, intensité qui correspond à la déviation totale de l'appareil, i_m.

$$s = \frac{g + x}{\frac{I_m}{i_m} - 1}.$$

Application numérique : $g = 0{,}3\ \Omega$, $x = 0{,}5\ \Omega$, $I_m = 1$ A,

$$i_m = 50 \text{ mA ou } 0{,}050 \text{ A}.$$

$$s = \frac{0{,}3 + 0{,}5}{\frac{1}{0{,}05} - 1} = \frac{0{,}8}{19},$$

$$s = \mathbf{0{,}042\,1\ \Omega}.$$

3° Si les trois résistances g, x et s étaient indépendantes de la température, l'indication de l'appareil serait valable à n'importe quelle température.

Mais, s'il n'en est pas ainsi, si s dépend de la température, le terme $\frac{g + x}{s}$ de l'expression (1) n'est pas constant et, pour un même courant, i, dans l'appareil, le courant I n'aura pas la même valeur à deux températures différentes.

s étant la résistance du shunt à la température t°C pour laquelle l'appareil donne une indication correcte, à la température $(t + 10)$ °C la résistance du shunt sera s_1. Pour un courant i dans l'appareil la valeur exacte de l'intensité à mesurer sera I_1.

L'erreur commise dans la mesure faite à $(t + 10)$ °C sera la différence $I - I_1$ entre la valeur I qu'aurait l'intensité à mesurer si la température était t °C pour le courant i et sa valeur exacte I_1.

Cette dernière valeur est donnée par l'expression (1) dans laquelle on fait $s = s_1$:

$$I_1 = \left(1 + \frac{g + x}{s_1}\right) i.$$

La différence $I - I_1$ est donc

$$I - I_1 = (g + x)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s_1}\right) i = (g + x)\frac{s_1 - s}{s\, s_1}\, i.$$

Exprimons s_1 en fonction de s. Pour une élévation de température de 1 °C l'augmentation de la résistance est $\frac{4s}{1\,000}$; pour 10 °C elle est

$$s_1 - s = \frac{4s}{1\,000} \times 10 = 0{,}04\,s.$$

Par suite $$s_1 = s + 0{,}04\,s = 1{,}04\,s.$$

La différence $I - I_1$ est donc

$$I - I_1 = (g + x)\,\frac{0{,}04\,s}{s \times 1{,}04\,s}\,i,$$

ou

$$I - I_1 = \frac{1}{26} \times \frac{g + x}{s} \times i.$$

L'erreur $I - I_1$ est positive. La mesure est faite par excès.

En outre $I - I_1$ dépend de i. Sa valeur est maximale quand $i = i_m$.

Application numérique : $g = 0{,}3\ \Omega$, $x = 0{,}5\ \Omega$, $s = \frac{0{,}8}{19}\ \Omega$.

$$I - I_1 = \frac{1}{26} \times \frac{0{,}3 + 0{,}5}{\frac{0{,}8}{19}}\,i, \qquad I - I_1 = \frac{19}{26}\,i.$$

Valeur maximale de $I - I_1$ pour $i = i_m = 50$ mA ou 0,050 A :

$$I - I_1 = \frac{19}{26} \times 0{,}050 = 0{,}036\,5\ \text{A}.$$

L'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsque la température s'élève de 10 °C et lorsque l'intensité à mesurer est 1 A est

$$\mathbf{I - I_1 = 0{,}04\ A.}$$

81. — Etude d'un voltmètre.

Un générateur, de force électromotrice E = 100 volts et de résistance intérieure négligeable, débite sur un potentiomètre, AB, de résistance R = 1 000 ohms. Une prise intermédiaire est placée en M de telle sorte que la résistance comprise entre A et M soit r = 250 ohms.

1° Calculer l'intensité du courant I fourni par le générateur ainsi que les différences de potentiel V_1 entre A et M et V_2 entre M et B.

2° Un voltmètre de résistance g = 2 500 ohms est utilisé pour contrôler ces valeurs.

***a)* Quelle sera l'indication V'_1 de cet appareil si on le monte entre A et M?**

***b)* Quelle sera l'indication V'_2 de cet appareil si on le monte entre M et B?**

3° De l'examen des valeurs des résistances R, r, g et des différences de potentiel V_1 et V'_1, V_2 et V'_2, faire ressortir une condition essentielle que les constructeurs doivent réaliser dans la fabrication d'un voltmètre. Dire ce que vous pensez du voltmètre utilisé dans les expériences précédentes.

(Salonique.)

1° La résistance du générateur étant négligeable, la résistance totale du circuit se réduit à celle du potentiomètre AB. L'intensité du courant fourni par le générateur est, en vertu de la loi de Pouillet,

$$I = \frac{E}{R}.$$

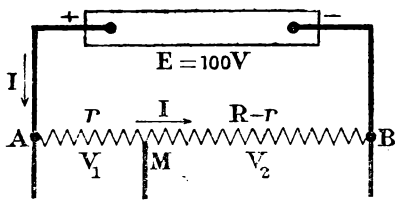


FIG. 1.

Les d.d.p. entre A et M et entre M et B (fig. 1) ont pour valeur

$$V_1 = rI = \frac{rE}{R}, \qquad (1)$$

et

$$V_2 = (R - r)\,I = \frac{(R - r)\,E}{R}. \qquad (2)$$

Application numérique : E = 100 V, R = 1000 Ω, r = 250 Ω.

$$I = \frac{100}{1\,000}, \qquad \mathbf{I = 0{,}1\ A.}$$

$$V_1 = \frac{250 \times 100}{1000}, \qquad \mathbf{V_1 = 25\ V.}$$

$$V_2 = \frac{(1000 - 250)\ 100}{1000} \qquad \mathbf{V_2 = 75\ V.}$$

2° *a*) *Indication du voltmètre branché entre* A *et* M.

La résistance R_1 équivalente aux deux dérivations entre A et M (fig. 2) est donnée par le théorème des conductances :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{g},$$

d'où

$$R_1 = \frac{rg}{r+g}.$$

La résistance totale du circuit est donc

$$R_1 + R - r = \frac{rg}{r+g} + R - r = R - \frac{r^2}{r+g}.$$

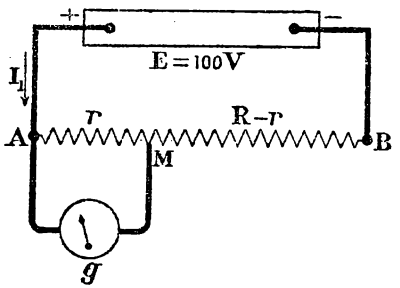


FIG. 2.

L'intensité du courant débité par le générateur est, d'après la loi de Pouillet,

$$I_1 = \frac{E}{R - \frac{r^2}{r+g}}.$$

La d.d.p. entre A et M est, en vertu de la loi d'Ohm pour une résistance morte,

$$V'_1 = R_1 I_1 = \frac{rg}{r+g} \times \frac{E}{R - \frac{r^2}{r+g}},$$

$$V'_1 = \frac{rgE}{R(r+g) - r^2}. \qquad (3)$$

L'indication du voltmètre branché entre A et M sera donc V'_1.

Application numérique :

$E = 100$ V, $r = 250\,\Omega$, $g = 2\,500\,\Omega = 10r$, $R = 1\,000\,\Omega = 4r$.

$$V'_1 = \frac{r \times 10r \times 100}{4r(r + 10r) - r^2} = \frac{1\,000}{43},$$

$$\mathbf{V'_1 = 23{,}25\ V.}$$

b) *Indication du voltmètre branché entre* M *et* B.

La résistance R_2, équivalente aux deux dérivations entre M et B (fig. 3), est donnée par le théorème des conductances :

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R-r} + \frac{1}{g};$$

d'où

$$R_2 = \frac{(R-r)g}{R-r+g}.$$

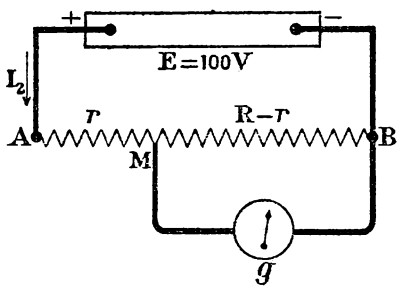


FIG. 3.

La résistance totale du circuit est dans ce cas

$$r + R_2 = r + \frac{(R-r)\,g}{R-r+g} = R - \frac{(R-r)^2}{R-r+g}.$$

L'intensité du courant débité par le générateur est, dans ce nouveau montage, d'après la loi de Pouillet,

$$I_2 = \frac{E}{R - \dfrac{(R-r)^2}{R-r+g}}.$$

La d.d.p. entre M et B est, encore en vertu de la loi d'Ohm pour une résistance morte,

$$V'_2 = R_2 I_2 = \frac{(R-r)g}{R-r+g} \times \frac{E}{R - \dfrac{(R-r)^2}{R-r+g}},$$

$$V'_2 = \frac{(R-r)\,g\,E}{R(R-r+g) - (R-r)^2}. \qquad (4)$$

L'indication du voltmètre branché entre M et B sera V'_2.

Application numérique :

$$E = 100\,V, \quad r = 250\,\Omega, \quad g = 2\,500\,\Omega = 10r, \quad R = 1\,000\,\Omega = 4r.$$

$$V_2 = \frac{(4r - r)\,10r \times 100}{4r(4r - r + 10r) - (4r - r)^2} = \frac{3\,000}{43}.$$

$$\mathbf{V_2' = 69{,}76\ V.}$$

3° La comparaison des valeurs trouvées pour V_1' et V_1 d'une part, pour V_2' et V_2 d'autre part montre que la d.d.p. entre A et M ou entre M et B, mesurée par le voltmètre, s'écarte notablement de la d.d.p. existant entre ces mêmes points en l'absence du voltmètre.

Dans les deux cas la différence est de même sens. Nous avons $V_1' < V_1$ et $V_2' < V_2$.

Cette différence s'explique par le fait que le voltmètre, par sa résistance g, modifie de façon sensible celle du circuit et, par suite, l'intensité du courant dans la portion de circuit aux bornes de laquelle il est placé.

Pour réaliser l'égalité $V_1' = V$ ou $V^2 = V_2$ il faudrait avoir $R_1 = r$ ou $R_2 = R - r$ ce qui suppose $g = \infty$.

La condition $V_1' \approx V_1$ ou $V_2' \approx V_2$ sera réalisée si

$$R_1 \approx r \quad \text{ou} \quad R_2 \approx R - r.$$

Nous pouvons écrire les expressions de R_1 et R_2 sous la forme

$$R_1 = \frac{r}{\frac{r}{g} + 1}, \quad R_2 = \frac{R - r}{\frac{R - r}{g} + 1}.$$

Nous aurons donc $R_1 \approx r$ si $\frac{r}{g}$ est négligeable devant 1,

et $R_2 \approx R - r$ si $\frac{R - r}{g}$ est négligeable devant 1.

La résistance du voltmètre devra donc être beaucoup plus grande que celle du conducteur aux extrémités duquel il est branché.

Le voltmètre utilisé ne satisfait pas à cette exigence.

Le rapport $\frac{r}{g}$ est égal à $\frac{r}{10r} = \frac{1}{10}$.

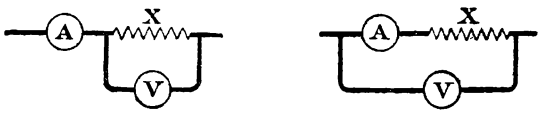
Le rapport $\frac{R - r}{g}$ est égal à $\frac{4r - r}{10r} = \frac{3}{10}$.

Ces rapports sont loin d'être négligeables devant 1 : le voltmètre utilisé n'est pas assez résistant.

82. — Utilisation d'un voltmètre. Mesure d'une résistance au moyen d'un ampèremètre et d'un voltmètre.

1° Un milliampèremètre à cadre mobile a une résistance de 75 ohms et la déviation de son aiguille indicatrice est maximale pour une intensité de 5 milliampères. Quelle résistance R doit-on placer en série avec cet appareil pour en faire un voltmètre gradué de 0 à 5 volts ?

2° On place ce voltmètre V en dérivation aux bornes d'une résistance X parcourue par un courant. Le voltmètre indique une différence de potentiel de 4,55 volts. Un ampèremètre A, placé avant la dérivation, marque une intensité de 0,91 ampère. Quelle est la valeur de la résistance X si l'on néglige le courant qui traverse le voltmètre ?



3° Quelle est la valeur de cette résistance si l'on tient compte de ce courant ?

4° On dispose l'ampèremètre A en série avec la résistance X et le voltmètre V en dérivation sur l'ensemble. Le voltmètre indique 5,42 volts et l'ampèremètre 0,90 ampère. Quelle est la résistance de l'ampèremètre ?

(Espagne et Portugal.)

1° Désignons par r la résistance du milliampèremètre.

Lorsqu'on établit une d.d.p. V aux bornes de la résistance R et du milliampèremètre placés en série, le courant i qui les traverse est, en vertu de la loi d'Ohm pour des résistances mortes,

$$V = (R + r)\, i.$$

On peut faire correspondre à chaque valeur de i une valeur de V et graduer l'appareil en volts.

Nous aurons la valeur de la résistance additionnelle R si nous connaissons V, i et r :

$$R = \frac{V}{i} - r.$$

En particulier, si nous nous donnons $V = V_m$, d.d.p. qui correspond à la déviation maximale de l'aiguille, i a la valeur i_m et nous avons

$$R = \frac{V_m}{i_m} - r.$$

Application numérique :

$V_m = 5$ volts, $i_m = 5$ mA ou 0,005 A, $r = 75\ \Omega$.

$$R = \frac{5}{0{,}005} - 75. \qquad \mathbf{R = 925\ \Omega.}$$

2° La d.d.p., V, aux bornes de la résistance X, est donnée par le voltmètre (fig. 1) Cette d.d.p. est, en vertu de la loi d'Ohm,

$$V = X\, i.$$

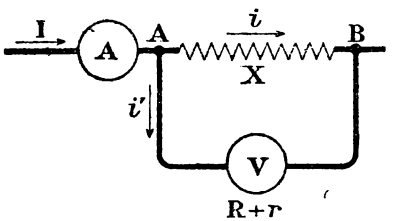


FIG. 1.

Si le courant i' qui traverse le voltmètre est négligeable devant le courant i qui traverse X nous pouvons poser

$$I = i$$

et, par suite,

$$V = X\, I.$$

La valeur de X est alors donnée par l'expression approchée

$$X = \frac{V}{I}. \qquad (1)$$

Application numérique : $V = 4{,}55$ volts, $I = 0{,}91$ A.

$$X = \frac{4{,}55}{0{,}91}, \qquad X = 5\,\Omega.$$

3° En réalité, le courant i qui traverse X n'est pas celui qui a traversé l'ampèremètre. Les deux lois des courants dérivés (intensités et tensions) donnent

$$I = i + i',$$
$$V = Xi = (R + r)\, i'.$$

En portant les valeurs de i et i', tirées de ces dernières équations, dans la première nous obtenons

$$I = \frac{V}{X} + \frac{V}{R + r}.$$

L'expression correcte de X est alors

$$X = \frac{(R + r)\, V}{(R + r)\, I - V}. \qquad (2)$$

Application numérique :

$$V = 4{,}55 \text{ volts}, \quad I = 0{,}91 \text{ A}, \quad R = 925\ \Omega, \quad r = 75\ \Omega.$$

$$X = \frac{(925 + 75)\,4{,}55}{(925 + 75)\,0{,}91 - 4{,}55} = \frac{1\,000}{199},$$

$$\mathbf{X = 5{,}025\ \Omega.}$$

L'écart relatif entre la valeur exacte et la valeur approchée de X est

$$\frac{\frac{1\,000}{199} - 5}{\frac{1\,000}{199}} = \frac{1}{200}.$$

Cet écart n'est pas considérable : il est du même ordre que la précision d'étalonnage des appareils de mesure, ampèremètre et voltmètre.

Exprimons à partir des expressions (1) et (2) cet écart relatif :

$$\frac{\frac{(R + r)\,V}{(R + r)\,I - V} - \frac{V}{I}}{\frac{(R + r)\,V}{(R + r)\,I - V}} = \frac{V}{(R + r)\,I}.$$

Il est d'autant plus faible que $(R + r)$ est plus élevé.

La première mesure sera d'autant plus proche de la mesure exacte que la résistance $(R + r)$ du voltmètre sera plus élevée.

4° Soit x la résistance de l'ampèremètre. L'ampèremètre et la résistance X étant placés en série (fig. 2) la d.d.p. V aux extrémités

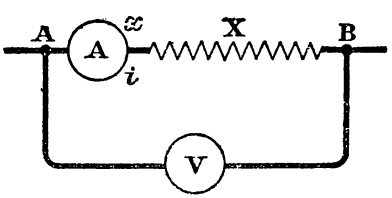


FIG. 2.

de l'ensemble est indiquée par le voltmètre placé en dérivation entre elles.

D'autre part elle est donnée par la loi d'Ohm pour des résistances mortes :

$$V = (x + X)i.$$

Cette relation permet de calculer x, puisque l'on connaît X, V, indication du voltmètre, et i, indication de l'ampèremètre :

$$x = \frac{V}{i} - X.$$

Application numérique : $V = 5{,}42$ volts, $i = 0{,}90$ A, $X = 5{,}025\ \Omega$.

$$x = \frac{5{,}42}{0{,}90} - 5{,}025,$$

$$x = \mathbf{0{,}997\ \Omega}.$$

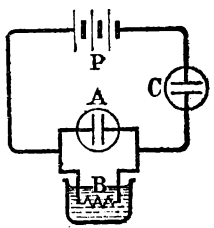
CHAPITRE XX

Courants dérivés.

DÉRIVATIONS COMPORTANT DES GÉNÉRATEURS ET DES RÉCEPTEURS

83. — Dérivations comportant des voltamètres.

Dans le circuit représenté par le schéma ci-dessous, P est un générateur de force électromotrice 17 volts, de résistance intérieure négligeable ; A est un voltamètre à solution de sulfate de cuivre $CuSO_4$ et anode de cuivre ; B un fil de 5 ohms plongeant dans 250 grammes d'eau ; C un voltamètre à eau acidulée par l'acide sulfurique de force contre-électromotrice 1,5 V. Les fils de connexion ont des résistances négligeables.



1° En 7 minutes la température de l'eau de B s'élève de 4,5°C et il se dépose 0,348 g de cuivre à la cathode du voltamètre A. Calculer les intensités dans les divers fils, les résistances des deux voltamètres, les volumes de gaz dégagés en 7 mn dans le voltamètre C, mesurés dans les conditions normales.

$$Cu = 64, \quad H = 1, \quad O = 16.$$

2° On intervertit les deux voltamètres. Calculer les intensités dans les divers fils.

Équivalent mécanique de la calorie : J = 4,2 joules.

(Liban.)

1° Désignons par r_1, r_2 et r_3 les résistances du voltamètre C, du voltamètre A et du fil plongé dans l'eau ;

par i_2 et i_3 les intensités dans les dérivations MAN et MBN et par i_1 l'intensité du courant dans le circuit principal ;

par E la force électromotrice du générateur P et par E′ la force contre électromotrice du voltamètre A (fig. 1).

Calcul des intensités.

L'intensité i_2 du courant qui traverse le voltamètre à sulfate de cuivre avec anode de cuivre est donnée par la loi de Faraday. Ce

courant dépose en un temps t une masse m de cuivre à la cathode. Si $\frac{A}{n}$ représente la valence-gramme du cuivre, nous pouvons écrire

$$m = \frac{1}{96\,500} \times \frac{A}{n} \times i_2 \times t.$$

Nous en tirons

$$i_2 = \frac{m \times 96\,500}{\frac{A}{n} \times t}.$$

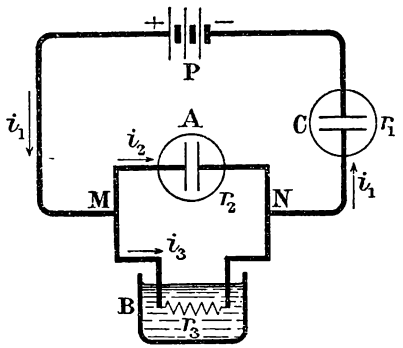


FIG. 1.

Numériquement :

$m = 0{,}348$ g, $t = 7$ minutes ou 420 secondes, $\frac{A}{n} = \frac{64}{2} = 32.$

$$i_2 = \frac{0{,}348 \times 96\,500}{32 \times 420},$$

$$i_2 = \mathbf{2{,}50\ A.}$$

L'intensité i_3 du courant qui traverse le fil plongé dans l'eau dont la masse est M grammes est donnée par la loi de Joule. Ce courant dissipe sous forme de chaleur pendant le temps t une énergie égale à $r_3 i_3^2 t$ joules.

La quantité de chaleur correspondante provoque une augmentation de température $\Delta\theta$ de la masse M d'eau dont la chaleur massique est 1 calorie par gramme et par degré. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{r_3 i_3^2 t}{J} = 1 \times M \times \Delta\theta,$$

d'où nous tirons

$$i_3 = \sqrt{\frac{1 \times M \times \Delta\theta \times J}{r_3 t}}.$$

Numériquement :

M = 250 g, $\Delta\theta = 4{,}5\,^{\circ}C$, J = 4,2 joules par calorie, $r_3 = 5$ ohms.

$$i_3 = \sqrt{\frac{1 \times 250 \times 4{,}5 \times 4{,}2}{5 \times 420}}, \qquad i_3 = \mathbf{1{,}50\ A.}$$

Enfin la loi de conservation de l'intensité donne

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Numériquement :

$$i_1 = 2{,}50 + 1{,}50,$$
$$i_1 = \mathbf{4{,}00\ A.}$$

Calcul des résistances des voltamètres.

Le voltamètre A à sulfate de cuivre avec anode de cuivre se comporte comme une résistance morte.

La loi d'Ohm appliquée à chacune des deux dérivations entre M et N donne

$$r_2 i_2 = r_3 i_3.$$

Nous en tirons

$$r_2 = r_3 \frac{i_3}{i_2}.$$

Numériquement : $r_3 = 5\ \Omega$, $i_3 = 1{,}50$ A, $i_2 = 2{,}50$ A.

$$r_2 = 5 \times \frac{1{,}50}{2{,}50}, \qquad r_2 = \mathbf{3\ \Omega.}$$

La résistance r équivalente à l'ensemble des deux dérivations est donnée par le théorème des conductances :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$$

Nous en tirons

$$r = \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}.$$

La résistance totale du circuit est la somme $r + r_1$.

La loi de Pouillet appliquée à ce circuit donne

$$E = (r + r_1) i_1 + E'.$$

Nous en tirons r_1 résistance du voltamètre C à eau acidulée

$$r_1 = \frac{E - E'}{i_1} - r.$$

Numériquement :

$$E = 17\ V, \quad E' = 1{,}5\ V, \quad i_1 = 4\ A, \quad r = \frac{3 \times 5}{3+5} = 1{,}875\ \Omega.$$

$$r_1 = \frac{17 - 1{,}5}{4} - 1{,}875, \qquad r_1 = 2\ \Omega.$$

Calcul des volumes de gaz dégagés dans le voltamètre C *:*

Le volume d'oxygène est la moitié du volume de l'hydrogène. Celui-ci a une valence-gramme égale à 1. La masse d'hydrogène dégagé est donnée par la loi de Faraday :

$$m_H = \frac{1}{96\,500} \times 1 \times i_1 \times t.$$

D'après la loi d'Avogadro-Ampère, 2 g d'hydrogène occupent un volume de 22 400 cm^3.

Le volume occupé par m_H g d'hydrogène est $v_H = m_H \times \frac{22\,400}{2}\ cm^3$.

Le volume occupé par l'oxygène est $v_O = \frac{v_H}{2}$.

Tous ces volumes sont mesurés dans les conditions normales de température et de pression.

Numériquement :

$$v_H = \frac{1}{96\,500} \times 1 \times 4 \times 420 \times \frac{22\,400}{2}.$$

$$v_H = \mathbf{195\ cm^3}. \qquad v_O = \mathbf{97{,}5\ cm^3}.$$

2° Si nous intervertissons les voltamètres A et C, les intensités i_1, i_2 et i_3 prennent des valeurs différentes i'_1, i'_2 et i'_3 (fig. 2).

La loi d'Ohm, appliquée aux trois dérivations MPN, MAN et MBN, *dans le sens du courant* donne :

dérivation MPN : $V_N - V_M = r_2 i'_1 - E$;
dérivation MCN : $V_M - V_N = r_1 i'_2 + E'$;
dérivation MBN : $V_M - V_N = r_3 i'_3$.

Nous en tirons

$$V_M - V_N = E - r_2 i'_1 = r_1 i'_2 + E' = r_3 i'_3.$$

La loi de la conservation de l'intensité donne d'autre part

$$i'_1 = i'_2 + i'_3. \qquad (1)$$

Les équations précédentes permettent de déterminer les trois intensités cherchées.

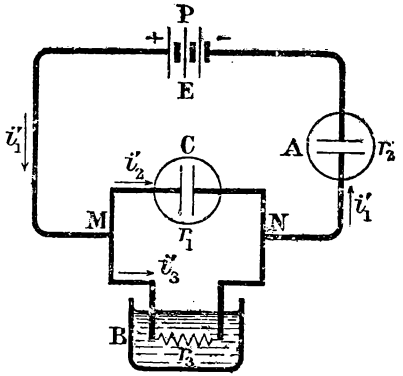


FIG. 2.

Application numérique :

E = 17 volts, E′ = 1,5 volt, $r_1 = 2$ ohms, $r_2 = 3$ ohms, $r_3 = 5$ ohms

Les équations précédentes deviennent

$$V_M - V_N = 17 - 3i'_1 = 2i'_2 + 1{,}5 = 5i'_3;$$

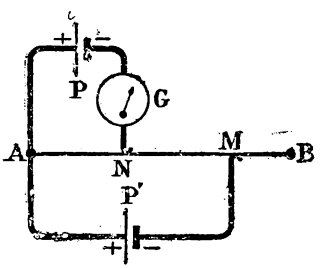
d'où nous tirons

$$\left.\begin{aligned} 17 - 3i'_1 &= 2i'_2 + 1{,}5, \\ 17 - 3i'_1 &= 5\,i'_3. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Le système d'équations (1) et (2) admet pour solution :

$$i'_1 = \mathbf{3{,}60\ A},$$
$$i'_2 = \mathbf{2{,}35\ A},$$
$$i'_3 = \mathbf{1{,}25\ A}.$$

§ 84. — Dérivations comportant des générateurs.



Un fil métallique AB, homogène, de diamètre constant et de 1 m de long, a une résistance de 10 ohms. Deux contacts mobiles, M et N, peuvent être déplacés le long de AB. Le pôle positif d'une pile, P, de force électromotrice constante E égale à 1,00 volt, est relié à A, son pôle négatif à l'une des bornes d'un galvanomètre, G, dont l'autre borne est reliée à N. Le pôle positif d'une autre pile, P′, est relié à A, son pôle négatif à M. Les résistances des fils de jonction sont négligeables. On pose AM = m et AN = n.

1° On prend $m = 100$ cm et l'on déplace N jusqu'à ce que G ne dévie pas ; il faut alors $n = 75$ cm. Calculer la force électromotrice, E', de P', en admettant que sa résistance intérieure r est négligeable.

2° En réalité r n'est pas négligeable ; pour en tenir compte on fait une deuxième mesure, en prenant $m = 50$ cm ; pour que G reste au zéro il faut alors $n = 39{,}3$ cm. Déduire de ces mesures la valeur exacte, avec deux décimales, de E' et celle de r.

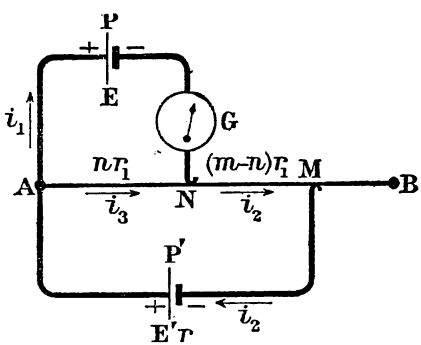
3° On déplace le contact M de B vers A et, en même temps, le contact N, de façon que G ne dévie pas. Existe-t-il pour toute position de M une position de N satisfaisant à cette condition ?

(*Montpellier.*)

Le fil de longueur l cm a une résistance R_1 ohms. La résistance d'un fil de 1 cm de longueur est

$$r_1 = \frac{R_1}{l}.$$

La partie AN du fil a une résistance nr_1, la partie NM une résistance $(m-n)r_1$.



1° Le circuit peut être considéré comme composé de trois tronçons ayant pour extrémités les points A et N :

a) Le tronçon APN, de résistance R (résistance intérieure de la pile + résistance du galvanomètre), qui est parcouru, dans le cas général, par un courant d'intensité i_1 pour lequel nous choisissons arbitrairement un sens positif (sens de A vers P). La pile P joue alors le rôle d'un récepteur de force contre-électromotrice E.

b) Le tronçon AP'MN, de résistance $r + (m-n)r_1$, qui est parcouru par un courant d'intensité i_2.

c) Le tronçon AN, de résistance nr_1, qui est parcouru par un courant d'intensité i_3.

La loi d'Ohm, appliquée *dans le sens du courant* à chacun des tronçons, donne :

tronçon APN : $V_A - V_N = Ri_1 + E;$

tronçon AP'MN : $V_N - V_A = ri_2 + (m-n)r_1i_2 - E'$, ou

$V_A - V_N = -ri_2 - (m-n)r_1i_2 + E';$

tronçon AN : $V_A - V_N = nr_1i_3.$

Nous en tirons

$$V_A - V_N = Ri_1 + E = -ri_2 - (m-n)r_1i_2 + E' = nr_1i_3.$$

Si $i_1 = 0$, les intensités dans les deux autres dérivations sont égales et nous pouvons poser

$$i_2 = i_3 = i.$$

Les équations précédentes deviennent

$$V_A - V_N = E = -ri - (m-n)r_1i + E' = nr_1i.$$

Elles donnent

$$E = nr_1i, \qquad (1)$$

et

$$E' = nr_1i + (m-n)r_1i + ri$$

ou

$$E' = mr_1i + ri. \qquad (2)$$

Si la résistance intérieure r de P' est supposée négligeable, l'expression (2) devient

$$E' = mr_1i. \qquad (3)$$

De (1) et (3), nous tirons

$$E' = \frac{m}{n}E.$$

Application numérique :

$$m = 100 \text{ cm}, \quad n = 75 \text{ cm}, \quad E = 1{,}00 \text{ volt}.$$

$$E' = \frac{100}{75} \times 1,$$

$$E' = \mathbf{1{,}33} \text{ volt}.$$

Remarque. — La relation (1) exprime que, lorsque l'intensité qui passe dans la dérivation APN est nulle, la force électromotrice de la pile P est égale à la chute ohmique de potentiel le long de la portion AN du fil.

La relation (2) est l'expression de la loi de Pouillet appliquée au circuit AP'MNA. Nous pouvons simplifier la résolution des problèmes analogues au précédent en utilisant cette remarque.

2° Soit E'_1 la valeur corrigée de la f.é.m. de la pile P', compte tenu de sa résistance intérieure r. Cette f.é.m. est donnée par les relations (1) et (2) d'où l'on tire

$$E'_1 = \frac{m}{n} E + \frac{E}{nr_1} r. \qquad (4)$$

Dans la deuxième expérience, les longueurs m et n ayant pris les valeurs m_1 et n_1, la f.é.m. E'_1 a pour expression

$$E'_1 = \frac{m_1}{n_1} E + \frac{E}{n_1 r_1} r. \qquad (5)$$

En égalant les expressions (4) et (5) de E'_1, nous obtiendrons la résistance r. En portant cette valeur dans l'expression (4), nous aurons la valeur corrigée E'_1.

Application numérique : $R_1 = 10\ \Omega$, $l = 1$ m ou 100 cm,

$$r_1 = \frac{R_1}{l} = \frac{10}{100} = 0{,}1, \qquad m = 100 \text{ cm}, \quad n = 75 \text{ cm},$$

$$m_1 = 50 \text{ cm}, \quad n_1 = 39{,}3 \text{ cm}.$$

Avec ces valeurs, l'expression (4) s'écrit

$$E'_1 = \frac{100}{75} \times 1 + \frac{1}{75 \times 0{,}1} \times r = \frac{100 + 10r}{75}, \qquad (4')$$

et l'expression (5),

$$E'_1 = \frac{50}{39{,}3} \times 1 + \frac{1}{39{,}3 \times 0{,}1} \times r = \frac{50 + 10r}{39{,}3}. \qquad (5')$$

En égalant ces deux valeurs de E'_1, il vient

$$(100 + 10r)\,39{,}3 = (50 + 10r)\,75,$$

d'où

$$r = \frac{180}{357}, \qquad r = \mathbf{0{,}504} \text{ ohm}.$$

En portant cette valeur dans (5') nous avons

$$E'_1 = \frac{100 + 10 \times 0{,}504}{75} = 1{,}400\,5,$$

soit

$$E'_1 = \mathbf{1{,}4} \text{ volt, à moins de } \frac{1}{100} \text{ près}.$$

3° Nous pouvons écrire l'expression (4) sous la forme

$$E'_1 = \frac{1}{n}\left(m + \frac{r}{r_1}\right) E.$$

Elle nous donne n en fonction de m :

$$n = \frac{E}{E'_1}\, m + \frac{E}{E'_1} \times \frac{r}{r_1}.$$

Application numérique :

$$n = \frac{1}{1{,}4}\, m + \frac{1}{1{,}4} \times \frac{0{,}504}{0{,}1},$$

$$n = 0{,}714\, m + 3{,}6.$$

On voit qu'à toute valeur de m comprise entre 0 et 100 cm correspond une valeur de n calculable. Si nous voulons avoir AM > AN ou $m > n$ conformément au dispositif adopté, il faut que

$$m \geqslant 0{,}714\, m + 3{,}6,$$

d'où

$$m \geqslant 12{,}6 \text{ cm}.$$

Si $m = 12{,}6$ cm, les valeurs de m et de n sont égales; N et M sont confondus.

85. — Dérivation comportant un moteur.

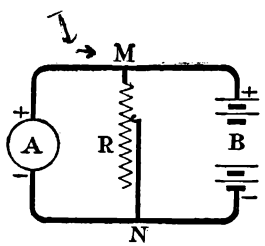
Une dynamo A, de f. é. m. 40 V, de résistance 1 Ω, sert à charger une batterie d'accumulateurs B dont on suppose la f. é. m. constante et égale à 30 V ; la résistance intérieure est 1 Ω. La résistance des fils de connexion est négligée.

1° Calculer l'intensité du courant dans le circuit.

2° On dispose en dérivation, entre M et N, une résistance réglable R. Pour une certaine valeur de R la différence de potentiel entre M et N est 34 V. Quelle est la valeur de R et quelles sont les intensités dans NAM, dans MBN et dans MN ?

3° Peut-on donner à R une valeur telle que l'intensité du courant dans MBN soit nulle ?

4° On dispose entre M et N, en série avec la résistance, un moteur dont la résistance est 0,25 Ω. La puissance fournie par le moteur est 0,2 kW lorsque la résistance R est ajustée de telle manière que l'intensité du courant dans MBN soit nulle. Calculer la valeur de R ainsi que la tension aux bornes du moteur.



(Alger.)

1° Nous connaissons la f.é.m. E et la résistance intérieure r de la dynamo, ainsi que la f.é.m. E′ et la résistance intérieure r' de la

batterie d'accumulateurs. Celle-ci est en opposition sur le circuit de la dynamo. Elle joue le rôle de récepteur et sa force contre électromotrice est égale à E′ (fig. 1).

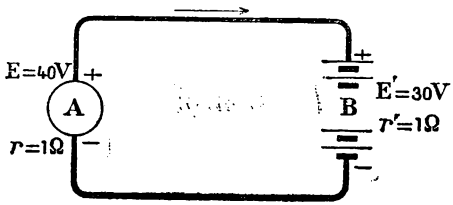


FIG. 1.

La résistance des fils de connexion étant supposée négligeable, la loi de Pouillet, appliquée au circuit, donne l'intensité I du courant :

$$E = (r + r')\,I + E';$$

d'où

$$I = \frac{E - E'}{r + r'}.$$

Application numérique :

$$E = 40 \text{ volts}, \quad E' = 30 \text{ volts}, \quad r = r' = 1 \text{ ohm}.$$

$$I = \frac{40 - 30}{2},$$

$$\mathbf{I = 5 \text{ ampères}.}$$

2° Représentons par des flèches le sens probable du courant dans les trois dérivations MAN, MRN et MBN et désignons par i_1, i_2 et i_3 les intensités dans ces trois dérivations (fig. 2).

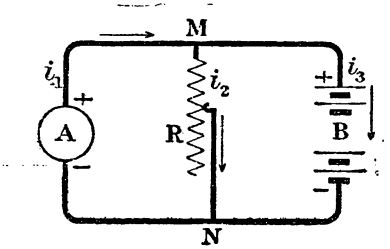


FIG. 2.

La loi de la conservation de l'intensité, appliquée au point M, donne

$$i_1 = i_2 + i_3. \qquad (1)$$

La loi d'Ohm, appliquée à chacune des dérivations *dans le sens du courant*, donne :

dérivation MAN : $V_N - V^M = ri_1 - E$;

dérivation MRN : $V_M - V_N = Ri_2$;

dérivation MBN : $V_M - V_N = r'i_3 + E'$.

Nous en tirons

$$V_M - V_N = E - ri_1 = Ri_2 = r'i_3 + E'. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) permettent la détermination des inconnues i_1, i_2, i_3 et R.

Application numérique :

$V_M - V_N = 34$ volts, $E = 40$ volts, $E' = 30$ volts, $r = r' = 1$ ohm,

Les équations (2) s'écrivent :

$$34 = 40 - i_1 = Ri_2 = i_3 + 30.$$

En tenant compte de (1) nous obtenons

$$i_1 = 40 - 34, \qquad i_1 = \mathbf{6\ ampères;}$$
$$i_3 = 34 - 30, \qquad i_3 = \mathbf{4\ ampères;}$$
$$i_2 = 6 - 4, \qquad i_2 = \mathbf{2\ ampères;}$$
$$R = \frac{34}{2}, \qquad \mathbf{R = 17\ ohms.}$$

3° Si l'intensité dans la dérivation MBN est nulle, les intensités dans les deux autres dérivations sont égales. Appelons i' cette intensité commune et R' la nouvelle valeur de la résistance réglable R.

La loi d'Ohm, appliquée aux trois dérivations donne

$$E - ri' = R'i' = E'.$$

Nous en tirons

$$i' = \frac{E - E'}{r}$$

et

$$R' = \frac{E'}{i'} = \frac{E'r}{E - E'}.$$

Application numérique :

$$E = 40\ V, \quad E' = 30\ V, \quad r = 1\ \Omega.$$

$$R' = \frac{30 \times 1}{40 - 30}$$

$$\mathbf{R' = 3\ ohms.}$$

4° L'intensité dans la dérivation MBN étant nulle, les intensités dans les deux autres dérivations sont égales. Appelons i'' cette intensité commune et R″ la nouvelle valeur de la résistance R (fig. 3).

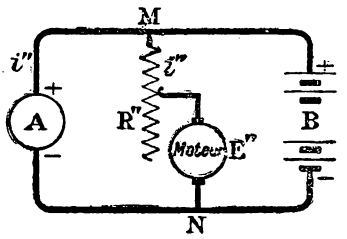


FIG. 3.

Le moteur, dont nous connaissons la résistance intérieure r'', a une force contre-électromotrice E″ égale au quotient de sa puissance P par l'intensité i'' du courant qui le traverse :

$$E'' = \frac{P}{i''}. \qquad (3)$$

La loi d'Ohm appliquée aux trois dérivations donne

$$E - ri'' = (R'' + r'')\, i'' + E'' = E'. \qquad (4)$$

Les relations (3) et (4) permettent de déterminer la résistance inconnue R″.

La tension aux bornes du moteur est donnée par la loi d'Ohm :

$$V = r''i'' + E''. \qquad (5)$$

Application numérique :

$r = 1\ \Omega$, $r'' = 0{,}25\ \Omega$, $P = 0{,}2$ kW ou 200 W.

Les équations (3), (4) et (5) deviennent

$$E'' = \frac{200}{i''},$$

$$40 - i'' = (R'' + 0{,}25)\ i'' + E'' = 30,$$

$$V = 0{,}25\ i'' + E''.$$

Nous en tirons

$$i'' = 40 - 30 = 10 \text{ ampères}, \qquad E'' = \frac{200}{10} = 20 \text{ volts}.$$

$$R'' = \frac{40 - 10 - 20}{10} - 0{,}25, \qquad \mathbf{R'' = 0{,}75 \text{ ohm}.}$$

$$V = 0{,}25 \times 10 + 20, \qquad \mathbf{V = 22{,}5 \text{ volts}.}$$

CHAPITRE XXI

Polarisation des voltamètres. Piles et accumulateurs.

86. — Étude de la polarisation d'un voltamètre.

Un rhéostat et un voltamètre contenant une solution aqueuse de soude où plongent deux électrodes de fer sont en série avec un générateur. Tous les fils de jonction ont une résistance négligeable.

1° Expliquer les phénomènes électrolytiques produits dans le voltamètre. Montrer que ce voltamètre se polarise. Calculer le volume d'oxygène (mesuré à 15 °C et sous la pression de 76 cm de mercure) dégagé en 5 minutes quand le courant est 2,5 ampères.

2° Quand $i = 2{,}5$ ampères la différence de potentiel V aux bornes du voltamètre est 6,5 volts et la résistance du rhéostat $R = 16{,}1$ ohms. On diminue la résistance du rhéostat ; quand $R = 13$ ohms on constate que $i = 3$ ampères et $V = 7{,}5$ volts. On demande ;

a) **la résistance r et la force contre-électromotrice e du voltamètre polarisé ;**

b) **la résistance ρ et la force électromotrice E du générateur.**

3° Pour chacune des deux valeurs de la résistance du rhéostat, quelle serait la répartition de la puissance consommée dans les différentes parties du circuit ?

4° Si le rhéostat, ayant la valeur 13 ohms, était mis en dérivation aux bornes du voltamètre et non plus en série, quelles seraient les intensités dans les diverses parties du circuit ?

96 500 coulombs libèrent une valence-gramme d'élément.

(Montréal.)

1° La soude, électrolyte fort, est, en solution, totalement ionisée :

$$Na\,OH \longrightarrow Na^+ + OH^-.$$

Les ions Na^+ descendent le courant et perdent leur charge sur la cathode. Les atomes neutres Na réagissent sur l'eau :

$$2\,Na + 2\,H_2O \longrightarrow 2\,NaOH + \nearrow H_2.$$

A la cathode, deux molécules Na OH se reconstituent aux dépens de deux molécules d'eau et une molécule d'hydrogène gazeux se dégage.

Les ions OH^- remontent le courant et perdent leur charge sur l'anode.

Les radicaux OH réagissent entre eux :

$$2\,OH \rightarrow H_2O + \frac{1}{2}\,\nearrow O_2.$$

A l'anode une molécule d'eau se reconstitue et une demi-molécule d'oxygène gazeux se dégage

En définitive, grâce au jeu des réactions secondaires, on observe dans cette électrolyse la décomposition d'une molécule d'eau (pour deux molécules de soude mise en jeu) dont les constituants, H_2 et $\frac{1}{2}\,O_2$, apparaissent respectivement à la cathode et à l'anode.

Au cours de cette électrolyse, les électrodes de fer du voltamètre subissent des modifications notables : les contacts fer — solution de soude sont devenus : à l'anode, fer + oxygène — solution de soude et, à la cathode, fer + hydrogène — solution de soude.

Ces deux électrodes primitivement identiques sont maintenant nettement différenciées : le voltamètre s'est polarisé.

Désignons par v le volume d'oxygène, mesuré à 0 °C et sous la pression de 76 cm de mercure, dégagé en t secondes par un courant dont l'intensité est i ampères, c'est-à-dire par it coulombs.

$\mathcal{F}$ coulombs libèrent à l'anode une valence-gramme d'oxygène $\left(\frac{16}{2}\text{ grammes}\right)$, qui occupe dans les conditions normales (0 °C et 76 cm de mercure) un volume $V_0 = \frac{11\,200}{2}\,cm^3$.

A la température θ °C et sous la pression de 76 cm de mercure ce volume est, en vertu de la loi de Gay-Lussac, $V_0\,(1 + \alpha\theta)$, $\alpha = \frac{1}{273}$ étant le coefficient de dilatation à pression constante des gaz parfaits.

Les volumes gazeux, pris dans les mêmes conditions de température et de pression, étant proportionnels aux masses, la loi de Faraday donne

$$v = V_0\,(1 + \alpha\theta) \times \frac{it}{\mathcal{F}},$$

ou

$$v = \frac{11\,200}{2} \times \frac{273 + \theta}{273} \times \frac{it}{\mathcal{F}}.$$

Application numérique : $\theta = 15$°C, $i = 2{,}5$ ampères,

$t = 5$ minutes ou 300 secondes, $\mathcal{F} = 96\,500$ coulombs.

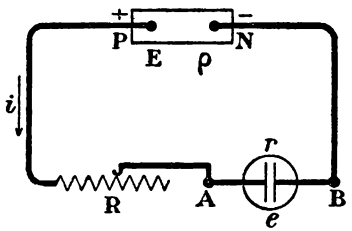
$$v = \frac{11\,200}{2} \times \frac{273 + 15}{273} \times \frac{2{,}5 \times 300}{96\,500},$$

$$\boldsymbol{v = 45{,}9\ cm^3}.$$

2° Désignons par i et i' les valeurs de l'intensité quand le rhéostat a pour résistance R et R'.

a) *Résistance r et force contre-électromotrice e du voltamètre.*

La d.d.p. aux bornes du voltamètre est V dans le premier cas, V' dans le second.



Appliquons à ce voltamètre la loi d'Ohm pour un récepteur :

$$\left.\begin{aligned} V &= ri + e, \\ V' &= ri' + e. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ces deux équations donnent r et e.

Application numérique :

$V = 6{,}5$ volts; $V' = 7{,}5$ volts; $i = 2{,}5$ ampères; $i' = 3$ ampères.

Le système d'équations (1) s'écrit :

$$6{,}5 = 2{,}5\,r + e,$$
$$7{,}5 = 3\,r + e.$$

Il admet pour solution

$$r = \frac{7{,}5 - 6{,}5}{3 - 2{,}5}, \qquad r = \mathbf{2\ ohms},$$

et

$$e = 7{,}5 - 3 \times 2, \qquad e = \mathbf{1{,}5\ volt.}$$

b) *Résistance* ρ *et force électromotrice* E *du générateur.*

La loi de Pouillet, pour un circuit fermé comprenant un récepteur, s'écrit dans les deux cas

$$\left.\begin{aligned} E &= (R + r + \rho)\, i + e, \\ E &= (R' + r + \rho)\, i' + e. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ces deux équations donnent ρ et E.

Application numérique :

$$R = 16{,}1\ \Omega; \quad R' = 13\ \Omega; \quad r = 2\ \Omega; \quad e = 1{,}5 \text{ volt.}$$

Le système d'équations (2) s'écrit :

$$E = (16{,}1 + 2 + \rho)\ 2{,}5 + 1{,}5 = 2{,}5\ \rho + 46{,}75,$$
$$E = (13 + 2 + \rho)\ 3 + 1{,}5 = 3\ \rho + 46{,}5.$$

Il admet pour solution

$$\rho = \frac{46{,}75 - 46{,}5}{0{,}5}, \qquad \rho = \mathbf{0{,}5\ ohm,}$$

et

$$E = 3 \times 0{,}5 + 46{,}5, \qquad \mathbf{E = 48\ volts.}$$

3° *Répartition de la puissance consommée dans les diverses parties du circuit.*

La puissance P_R, consommée dans le rhéostat, est donnée par la loi de Joule :

$$P_R = Ri^2.$$

La puissance P_V, consommée dans le voltamètre, s'obtient à partir de la d.d.p. V à ses bornes :

$$P_V = Vi.$$

La puissance P_G, consommée dans le générateur, est donnée par la loi de Joule :

$$P_G = \rho i^2.$$

Il est évident que la somme de ces puissances doit être égale à la puissance totale fournie par le générateur : $P_T = Ei$.

Application numérique :

	$P_R = Ri^2$	$P_V = Vi$	$P_G = \rho i^2$	$P_T = Ei$
$R = 16{,}1\ \Omega$ $i = 2{,}5$ A $V = 6{,}5$ A	100,625 W	16,25 W	3,125 W	120 W
$R = 13\ \Omega$ $i = 3$ A $V = 7{,}5$ V	117 W	22,5 W	4,5 W	144 W

4° Désignons par I, I_1 et I_2 les intensités dans les différentes portions du circuit et appliquons les lois des courants dérivés.

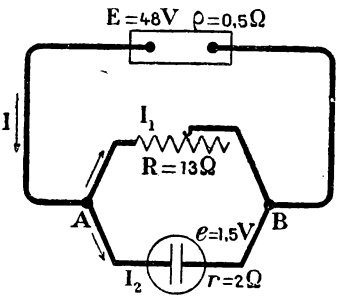
La loi des intensités donne

$$I = I_1 + I_2. \qquad (3)$$

La loi des différences de potentiel donne

$$RI_1 = rI_2 + e = E - \rho I. \quad (4)$$

Ce système de trois équations permet de calculer les trois inconnues I, I_1 et I_2.



Application numérique :

$R = 13\ \Omega$, $r = 2\ \Omega$, $\rho = 0{,}5\ \Omega$, $e = 1{,}5$ volt, $E = 48$ volts.

Le système des équations (3) et (4) s'écrit :

$$I = I_1 + I_2, \qquad (3')$$

$$13\,I_1 = 2\,I_2 + 1{,}5 = 48 - 0{,}5\,I. \qquad (4')$$

Des équations (4') nous tirons :

$$I_1 = \frac{48 - 0{,}5\,I}{13},$$

et

$$I_2 = \frac{48 - 1{,}5 - 0{,}5\,I}{2}.$$

Portons ces valeurs dans (3') :

$$I = \frac{48 - 0{,}5\,I}{13} + \frac{46{,}5 - 0{,}5\,I}{2},$$

$$26\,I = 700{,}5 - 7{,}5\,I,$$

$$I = \frac{700{,}5}{33{,}5}, \qquad \mathbf{I = 20{,}91\ ampères.}$$

$$I_1 = \frac{48 - 0{,}5 \times 20{,}91}{13}, \qquad \mathbf{I_1 = 2{,}89\ ampères.}$$

$$I_2 = \frac{48 - 1{,}5 - 0{,}5 \times 20{,}91}{2}, \qquad \mathbf{I_2 = 18{,}02\ ampères.}$$

87. — Étude d'une pile Daniell.

Une pile Daniell est formée d'une cathode en zinc plongeant dans une solution de sulfate de zinc et d'une anode en cuivre plongeant dans une solution de sulfate de cuivre ; les deux liquides sont séparés par une cloison poreuse ; la force électromotrice de cet élément est *e* et sa résistance interne est *r*.

1° On réunit les deux bornes de la pile par un fil conducteur de résistance R. Calculer l'intensité i du courant ainsi que la différence de potentiel V entre les deux bornes de la pile.

2° Calculer l'énergie dépensée par seconde dans le fil ; que devient cette énergie ?

3° Expliquer les phénomènes d'électrolyse dont la pile est le siège et calculer la masse de zinc consommée en une heure.

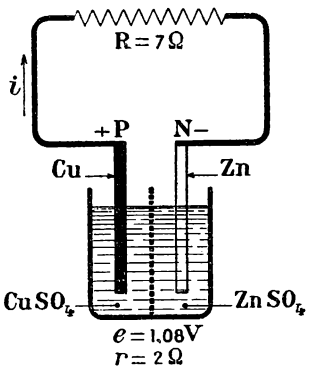
4° Le fil conducteur étant supprimé, la même pile est reliée aux pôles d'un générateur dont la force électromotrice, e', est opposée à celle de la pile ; la résistance totale du circuit extérieur à la pile conserve la même valeur, R. Quelle sera la nouvelle intensité du courant ? Que se passera-t-il alors dans la pile ? Quelles seront les masses de zinc et de cuivre déplacées en 1 heure ?

Application numérique : $r = 2\Omega$, $R = 7\Omega$, $e = 1{,}08$ V, $e' = 9{,}98$ V, Zn = 65,4, Cu = 63,6.

On sait que, dans l'électrolyse de l'eau, il faut 96 500 coulombs pour libérer 1 gramme d'hydrogène.

(Alger.)

1° La loi de Pouillet appliquée au circuit fermé comprenant la pile Daniell et le fil conducteur s'écrit



$$e = (R + r)\,i.$$

Nous en déduisons l'intensité i du courant :

$$i = \frac{e}{R + r}.$$

Numériquement : $e = 1{,}08$ volt,

$R = 7$ ohms, $r = 2$ ohms.

$$i = \frac{1{,}08}{7 + 2} = \frac{1{,}08}{9}, \qquad i = \mathbf{0{,}12\ A.}$$

La d.d.p. V entre les deux bornes de la pile est donnée par la loi d'Ohm pour une résistance morte

$$V = Ri.$$

Numériquement : $R = 7$ ohms; $i = 0{,}12$ ampère.

$$V = 7 \times 0{,}12, \qquad \mathbf{V = 0{,}84\ volt.}$$

2° L'énergie W dépensée dans le fil pendant le temps t est, en vertu de la définition de la d.d.p.,

$$W = Vit.$$

Numériquement : $V = 0{,}84$ volt; $i = 0{,}12$ ampère; $t = 1$ seconde.

$$W = 0{,}84 \times 0{,}12 \times 1, \qquad \mathbf{W = 0{,}1008\ joule.}$$

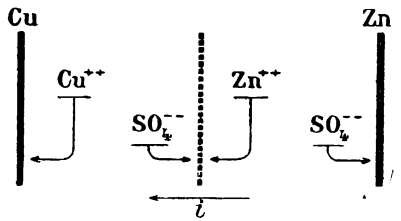
Cette énergie est transformée en chaleur par effet Joule. Le nombre de calories obtenues en 1 seconde est

$$Q = \frac{W}{4,18}.$$

Numériquement :

$$Q = \frac{0,1008}{4,18}, \qquad \mathbf{Q = 0,0241 \text{ calorie.}}$$

3° La pile qui fournit le courant i est elle-même traversée par ce courant, qui va du zinc au cuivre. C'est un voltamètre, auquel sont applicables les lois de l'électrolyse.



Les ions SO_4^{--} du compartiment anodique remontent le courant, perdent leur charge sur l'électrode de zinc et les radicaux SO_4 réagissent sur elle :

$$SO_4 + Zn \longrightarrow ZnSO_4.$$

Dans ce compartiment, saturé en sulfate de zinc, il se dépose des cristaux de ce sel.

Les ions Cu^{++} du compartiment cathodique descendent le courant, perdent leur charge sur l'électrode de cuivre, et le cuivre s'y dépose à l'état métallique.

Dans ce compartiment il y a disparition de sulfate de cuivre. Si la solution est saturée au contact de cristaux de ce sel, ceux-ci se dissolvent.

Le bilan chimique de l'électrolyse s'établit ainsi : une molécule $CuSO_4$ disparaît, en donnant lieu à l'augmentation de la masse des l'électrode en cuivre, et une molécule $ZnSO_4$ se forme tandis que diminue la masse de l'électrode en zinc.

Désignons par m la masse de zinc consommée dans le temps t. La quantité d'électricité qui a traversé la pile dans ce temps est it coulombs. S'il faut $\mathcal{F}$ coulombs pour libérer 1 gramme d'hydrogène soit une valence-gramme d'hydrogène, en vertu de la loi de Faraday,

il faut la même quantité d'électricité pour déposer une valence-gramme de cuivre ou pour faire passer à l'état de sulfate une valence-gramme de zinc.

$\frac{A}{n}$ représentant la valence-gramme du zinc, la masse m correspondant à it coulombs est donc

$$m = \frac{A}{n} \times \frac{it}{\mathcal{F}}.$$

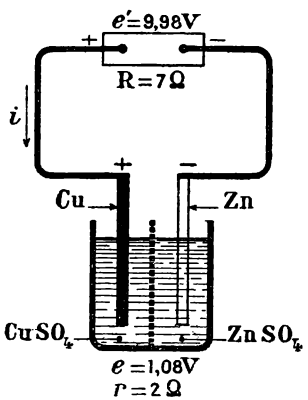
Numériquement :

$\frac{A}{n} = \frac{65,4}{2}$, $i = 0,12$ ampère, $t = 3600$ s, $\mathcal{F} = 96500$ coulombs.

$$m = \frac{65,4}{2} \times \frac{0,12 \times 3600}{96500},$$

$$m = \mathbf{0,146\ g.}$$

4° Le générateur, dont la f.é.m. est e', étant en opposition avec la pile Daniell, celle-ci se comporte comme un récepteur de force contre-électromotrice e. Le courant dans le circuit a une intensité i_1, donnée par la loi de Pouillet :



$$i_1 = \frac{e' - e}{R + r}.$$

Numériquement : $e' = 9,98$ volts,

$e = 1,08$ volt, $R = 7\ \Omega$, $r = 2\ \Omega$.

$$i_1 = \frac{9,98 - 1,08}{7 + 2} = \frac{8,90}{9} = 0,9888.$$

$$i_1 = \mathbf{0,989\ ampère.}$$

Dans le montage étudié, la pile Daniell est traversée par un courant qui va du cuivre au zinc.

Les ions SO_4^{--} du compartiment anodique remontent le courant, perdent leur charge sur l'électrode de cuivre et les radicaux SO_4 réagissent sur elle

$$SO_4 + Cu \rightarrow CuSO_4.$$

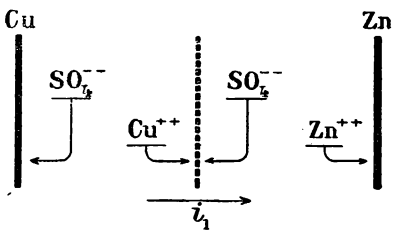
Dans ce compartiment, saturé en $CuSO_4$, il se dépose des cristaux de sulfate de cuivre.

Les ions Zn^{--} du compartiment cathodique descendent le courant, perdent leur charge sur l'électrode de zinc et le zinc s'y dépose à l'état de zinc métallique.

Dans ce compartiment il y a disparition de $ZnSO_4$. Si la solution est saturée au contact de cristaux de sulfate de zinc, ces cristaux se dissolvent.

Le bilan chimique de l'électrolyse s'établit ainsi : une molécule $ZnSO_4$ disparaît, donnant lieu à l'augmentation de masse de l'électrode en zinc, et une molécule $CuSO_4$ se forme, tandis que diminue la masse de l'électrode en cuivre.

Ces phénomènes sont l'inverse de ceux que nous avons observés lorsque le courant traversait la pile en sens opposé. C'est pour cette raison que l'on dit que la pile Daniell est réversible. Il est évident que sa force contre-électromotrice est égale numériquement à sa force électromotrice.



Désignons par m_1 et m'_1 les masses de zinc et de cuivre déplacées dans le temps t quand la pile est traversée par le courant i_1. Ces masses nous sont données par la loi de Faraday.

La masse de zinc déposée est

$$m_1 = \frac{A}{n} \times \frac{i_1 t}{\mathcal{F}}.$$

La masse de cuivre passée à l'état de sulfate de cuivre est

$$m_1' = \frac{A'}{n'} \times \frac{i_1 t}{\mathcal{F}}.$$

Numériquement : $\frac{A}{n} = \frac{65,4}{2}$, $\frac{A'}{n'} = \frac{63,6}{2}$, $i_1 = 0,989$ ampère,

$t = 1$ heure ou 3600 s, $\mathcal{F} = 96500$ coulombs.

Masse de zinc :

$$m_1 = \frac{65,4}{2} \times \frac{0,989 \times 3600}{96500} = 1,205,$$

$$m_1 = \mathbf{1,205\ g.}$$

Masse de cuivre :

$$m'_1 = \frac{63,6}{2} \times \frac{0,989 \times 3600}{96500} = 1,173,$$

$$m'_1 = \mathbf{1,173\ g.}$$

88. — Accumulateurs. Variation de la force contre-électromotrice au cours de la charge.

On veut charger une batterie de 40 accumulateurs identiques montés en série. Pour cela, on connecte cette batterie aux bornes d'un générateur à courant continu ayant une force électromotrice constante de 110 volts et une résistance intérieure négligeable. On intercale sur le circuit un rhéostat de résistance R, un ampèremètre de très faible résistance et un interrupteur. On branche ensuite un voltmètre très résistant directement aux bornes de la batterie.

1° Dessiner le schéma du circuit en indiquant la polarité des bornes du générateur et de la batterie.

2° L'interrupteur étant ouvert, on constate que le voltmètre indique 76 volts. Quelle est la force électromotrice de chaque élément de la batterie avant la charge ?

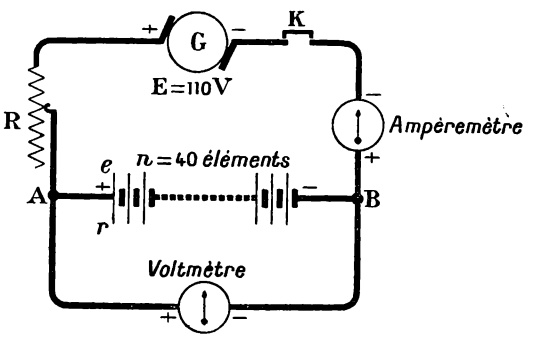
3° Lorsqu'on ferme l'interrupteur, l'ampèremètre indique 5 ampères et le voltmètre 86 volts. Quelle est la résistance intérieure de la batterie, en admettant que sa force électromotrice conserve pendant les premiers instants de la charge la valeur précédente ? Quelle est alors la valeur de la résistance R ?

4° On constate, en cours de charge, que l'intensité du courant tend à baisser et l'on agit sur le rhéostat pour la maintenir constante. En fin de charge, le rhéostat doit être ramené à zéro pour que l'ampèremètre continue à indiquer 5 ampères. Quelle est l'indication du voltmètre ?

Quelle est alors la force contre-électromotrice de la batterie, en admettant que sa résistance n'a pas changé ?

(Réunion.)

1° Le schéma du circuit de charge est représenté ci-dessous. Pour la charge, la batterie d'accumulateurs doit être traversée par un cou-



rant allant du pôle + au pôle —. Il faut donc la monter en opposition avec le générateur.

2° L'interrupteur K étant ouvert, le voltmètre branché aux bornes de la batterie indique V volts. Cette d.d.p., d'après la loi d'Ohm pour un générateur traversé par un courant i allant du pôle — au pôle +, est égale à la f.é.m. du générateur diminuée de la chute de tension ohmique. Si nous avons n éléments ayant chacun une f.é.m. e et une résistance r,

$$V = ne - nri.$$

La batterie fermée sur un voltmètre très résistant ne débite pratiquement pas de courant: $i \approx 0$. Le terme nri est négligeable devant ne et la relation précédente s'écrit

$$V = ne. \qquad (1)$$

Le voltmètre indique alors approximativement la f.é.m. de la batterie.

Chaque élément a une f.é.m.

$$e = \frac{V}{n}.$$

Application numérique :

$$V = 76 \text{ volts}, \quad n = 40 \text{ éléments}.$$

$$e = \frac{76}{40}, \qquad e = \mathbf{1{,}9 \text{ volt}}.$$

3° Lorsqu'on ferme l'interrupteur K le générateur débite un courant I. La dérivation du voltmètre ne prenant qu'un courant infime nous pouvons considérer que cette intensité I qui traverse le générateur, le rhéostat et l'ampèremètre est aussi celle qui traverse la batterie. En raison du montage en opposition, la batterie se comporte comme un récepteur de force contre-électromotrice ne et de résistance intérieure nr. La d.d.p. à ses bornes, V', est donnée par la loi d'Ohm pour un récepteur :

$$V' = nrI + ne. \qquad (2)$$

Cette relation fournit la résistance intérieure nr :

$$nr = \frac{V' - ne}{I}.$$

En tenant compte de la relation (1) nous avons

$$nr = \frac{V' - V}{I}.$$

La résistance R du rhéostat qui permet d'obtenir ce courant I est donnée par la loi de Pouillet appliquée au circuit comprenant le générateur, le rhéostat, la batterie et l'ampèremètre.

$$E = (R + nr)I + ne.$$

La relation (2) permet d'écrire

$$E = RI + V'. \qquad (3)$$

Nous en déduisons la valeur R cherchée

$$R = \frac{E - V'}{I}.$$

Application numérique : E=110 volts, V=76 volts, V'=86 volts, I = 5 ampères.

La résistance intérieure de la batterie est

$$nr = \frac{86 - 76}{5}, \qquad nr = \mathbf{2\ ohms.}$$

Celle du rhéostat est

$$R = \frac{110 - 86}{5}, \qquad \mathbf{R = 4{,}8\ ohms.}$$

4° En fin de charge pour maintenir constante l'intensité I il a fallu ramener le rhéostat à zéro, c'est-à-dire supprimer la résistance R. Le voltmètre indique alors une d.d.p. V", qui est la d.d.p. commune aux bornes de la batterie et aux bornes du générateur.

La résistance du générateur étant négligeable, la d.d.p. à ses bornes est égale à sa f.é.m. :

$$V'' = E. \qquad (1)$$

D'autre part, la relation (3) donne

$$V' = E - R\ I.$$

Si nous comparons V" à V' nous voyons que la d.d.p. a augmenté.

Si la résistance de la batterie n'a pas changé et si le courant conserve la même intensité, I, c'est que la force contre-électromotrice de la batterie a augmenté. Désignons par ne' cette nouvelle valeur. Nous avons alors

$$V'' = nr\,I + ne'.$$

En tenant compte de (4) nous obtenons pour la force contre-électromotrice de la batterie l'expression

$$ne' = E - nr\,I.$$

Application numérique : E=110 volts, nr=2 ohms, I=5 ampères.

$$V'' = E = 110, \qquad \mathbf{V'' = 110\ volts.}$$

$$ne' = 110 - 2\times 5, \qquad \mathbf{ne' = 100\ volts.}$$

La force contre-électromotrice d'un élément passe de 1,9 volt en début de charge à $\frac{100}{40} = 2{,}5$ volts en fin de charge.

89. — Accumulateurs : Rendement en quantité d'électricité et en énergie.

On charge une batterie d'accumulateurs dont la résistance intérieure est constante et vaut 0,8 ohm en maintenant entre ses bornes une différence de potentiel constante de 120 volts. Au début de la charge, la force contre-électromotrice de la batterie est 100 volts et elle s'élève en fin de charge à 118 volts.

1° Calculer l'intensité du courant au début et à la fin de la charge.

2° Calculer la quantité totale d'électricité qui a traversé la batterie pendant la charge au moyen des données suivantes :

On mesure cette quantité d'électricité avec un compteur électro-chimique qui se compose d'un voltamètre shunté par une résistance qui n'y laisse passer que le 1/100 du courant total et où l'on électrolyse un sel de mercure monovalent. On pèse le mercure déposé à la cathode en fin d'opération et l'on trouve 10,36 g. La masse atomique du mercure est 200 ; la quantité d'électricité libérant 1 valence-gramme est 96 500 coulombs.

3° Calculer la quantité totale d'énergie dépensée pendant la charge.

4° La décharge de la batterie en régime constant de 12 ampères dure 11 heures et la f. é. m. de la batterie reste constamment égale à 100 volts.

a) **Calculer en ampère-heure et en coulombs la quantité d'électricité restituée. Calculer la quantité d'énergie restituée.**

b) **Quels sont les rendements de la batterie en quantité d'électricité et en énergie ?**

(Besançon.)

1° Désignons par I et I_1 l'intensité du courant au début et à la fin de la charge. Au cours de cette opération, la batterie d'accumulateurs est traversée par un courant qui va du pôle + au pôle —. Elle se comporte donc comme un récepteur dont la force contre-électromotrice a la valeur E′ au début, et la valeur E'_1 à la fin de la charge. Sa résistance intérieure R étant constante, ainsi que la d.d.p. à ses bornes, la loi d'Ohm pour un récepteur fournit les deux équations

$$V = R\,I + E' = R\,I_1 + E'_1,$$

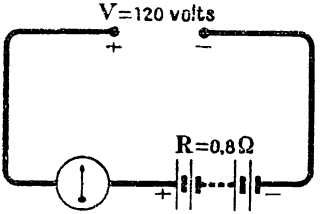
d'où nous tirons les valeurs de I et I_1 cherchées :

$$I = \frac{V - E'}{R}, \qquad I_1 = \frac{V - E'_1}{R}.$$

Application numérique :

$V = 120$ volts, $E' = 100$ volts,

$E'_1 = 118$ volts, $R = 0{,}8$ ohm.



$$I = \frac{120 - 100}{0{,}8},$$

I = 25 ampères.

$$I_1 = \frac{120 - 118}{0{,}8}, \qquad \mathbf{I_1 = 2{,}5\ ampères.}$$

2° Soit Q coulombs la quantité d'électricité qui a traversé la batterie pendant cette charge à intensité variable. Le voltamètre constituant le compteur électrochimique est traversé par la quantité d'électricité $\frac{Q}{100}$ coulombs. S'il faut $\mathcal{F}$ coulombs pour libérer 1 valence-gramme $\left(\frac{A}{n}\right)$ de mercure, la masse de mercure déposée par $\frac{Q}{100}$ coulombs sera

$$m = \frac{A}{n} \times \frac{\frac{Q}{100}}{\mathcal{F}}.$$

Si l'on connaît m on peut calculer Q, quantité d'électricité cherchée :

$$Q = 100 \times \frac{m}{\frac{A}{n}} \times \mathcal{F}.$$

Application numérique :

$m = 10{,}36$ grammes, $\frac{A}{n} = \frac{200}{1} = 200$ grammes, $\mathcal{F} = 96\,500$ coulombs,

$$Q = 100 \times \frac{10{,}36}{200} \times 96\,500 = 499\,870.$$

Q = 500 000 coulombs.

3° La quantité totale d'énergie dépensée pendant la charge, W, se calcule à partir de la d.d.p. et de la quantité d'électricité. Par définition, la d.d.p., V, aux bornes d'une portion de circuit est le rapport de l'énergie W abandonnée par la quantité d'électricité Q à cette quantité d'électricité:

$$V = \frac{W}{Q};$$

nous en déduisons

$$W = V \times Q.$$

Application numérique : V = 120 volts, Q = 500 000 coulombs.

$$W = 120 \times 500\,000, \qquad \mathbf{W = 60 \times 10^6 \text{ joules.}}$$

4° *a*) La décharge de la batterie étant effectuée à intensité constante I, pendant un temps t, la quantité d'électricité débitée, Q', est

$$Q' = I \times t.$$

Si l'on exprime I en ampères et t en heures, Q' sera obtenu en ampère-heure.

Si l'on exprime I en ampères et t en secondes, Q′ sera obtenu en coulombs.

La quantité d'énergie restituée pendant la décharge, W′, se calcule à partir de la f.é.m. et de la quantité d'électricité. Par définition, la f.é.m., E, d'un générateur est le rapport de l'énergie totale fournie par le générateur dans tout le circuit à la quantité d'électricité ayant transporté cette énergie :

$$E = \frac{W'}{Q'}.$$

Nous en déduisons

$$W' = E \times Q'.$$

Application numérique :

I = 12 ampères, t = 11 heures ou 11 × 3 600 s, E = 100 volts.

$Q' = 12 \times 11$, **Q′ = 132 ampère-heure.**

$Q' = 12 \times 11 \times 3\,600$, **Q′ = 475 200 coulombs.**

$W' = 100 \times 475\,200$, **W′ = 47,52 × 10^6 joules.**

b) Le rendement de la batterie en quantité d'électricité est le rapport $\frac{Q'}{Q}$ de la quantité d'électricité Q′ qu'elle fournit dans la décharge, à la quantité d'électricité Q qu'il a fallu lui fournir pendant la charge.

Le rendement de la batterie en énergie est le rapport $\frac{W'}{W}$ de l'énergie W′ qu'elle fournit pendant la décharge, à l'énergie W qu'il a fallu lui fournir pendant la charge.

En prenant les valeurs précédentes nous obtenons pour ces rendements :

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{475\,200}{500\,000}, \qquad \mathbf{\frac{Q'}{Q} = 0{,}950.}$$

$$\frac{W'}{W} = \frac{47{,}52 \times 10^6}{60 \times 10^6}, \qquad \mathbf{\frac{W'}{W} = 0{,}792.}$$

Le rendement en énergie est plus faible que le rendement en quantité d'électricité.

90. — Groupement des générateurs.

On dispose de 60 éléments d'accumulateurs dont chacun a une force électromotrice de 2 volts et une résistance intérieure de 0,2 ohm.

1° On groupe ces éléments en série, dans un circuit dont la résistance extérieure est 138 ohms. Quelle sera l'intensité du courant ?

2° On les groupe en parallèle : le circuit extérieur a une résistance de 0,03 ohm ; calculer l'intensité du courant dans le circuit extérieur et dans chacun des éléments.

3° La résistance extérieure est 0,12 ohm ; quel est le mode de groupement qui fournira l'intensité maximale dans le circuit extérieur ? Quelle sera cette intensité et quelle sera-t-elle dans chacun des éléments ?

4° Dans le cas du 3°, calculer la quantité de chaleur dégagée en 6 heures : *a)* dans le circuit extérieur ; *b)* dans l'ensemble des éléments.

(*Lyon.*)

Désignons par n le nombre d'éléments, par e leur f.é.m. et par r leur résistance intérieure.

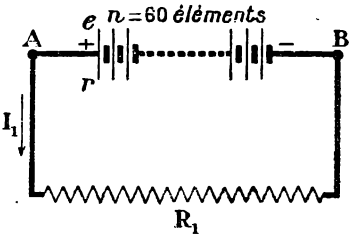


FIG. 1.

1° *Groupement en série* (*fig.* 1).

La f.é.m. de la batterie est égale à la somme des f.é.m. des éléments qui la constituent, c'est-à-dire égale à ne. Sa résistance intérieure est égale à la somme des résistances intérieures des éléments, c'est-à-dire égale à nr.

Si nous réunissons ses deux bornes A et B aux extrémités d'une résistance égale à R_1, l'intensité I_1 du courant débité dans cette résistance est donnée par la loi de Pouillet :

$$ne = (nr + R_1)\, I_1.$$

D'où nous tirons

$$I_1 = \frac{ne}{nr + R_1}. \qquad (1)$$

Application numérique :

$$e = 2 \text{ volts}, \quad r = 0{,}2 \text{ ohm}, \quad R_1 = 138 \text{ ohms}, \quad n = 60$$

$$I_1 = \frac{60 \times 2}{60 \times 0{,}2 + 138} = \frac{120}{150}.$$

$$\mathbf{I_1 = 0{,}8 \text{ ampère.}}$$

2° *Groupement en parallèle* (*fig.* 2).

Entre les points A et B nous avons n dérivations identiques comportant un générateur de f.é.m. e et de résistance r et la dérivation comportant la résistance extérieure R_2.

Les n dérivations sont parcourues par le même courant d'intensité i. La résistance extérieure est parcourue par le courant d'intensité I_2, que nous nous proposons de déterminer.

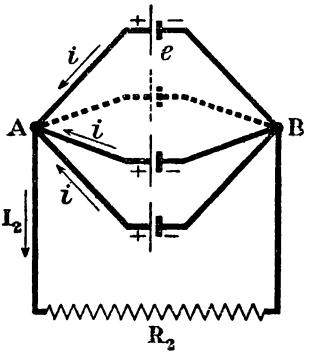


FIG. 2.

La loi de la conservation de l'intensité, appliquée au point A donne

$$I_2 = ni. \qquad (2)$$

La loi d'Ohm, appliquée à une dérivation contenant un élément d'accumulateur et au circuit extérieur donne :

dérivation AeB : $V_A - V_B = e - ri$,

ou, en tenant compte de (2),

$$V_A - V_B = e - r\frac{I_2}{n};$$

dérivation AR_2B : $V_A - V_B = R_2 I_2$.

Écrivons que ces deux d.d.p. sont égales :

$$e - r\frac{I_2}{n} = R_2 I_2,$$

d'où

$$e = \left(\frac{r}{n} + R_2\right) I_2. \qquad (3)$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$ne = (r + nR_2)\, I_2.$$

Nous en tirons

$$I_2 = \frac{ne}{r + nR_2}. \qquad (4)$$

Application numérique :

$$R_2 = 0{,}03 \text{ ohm}, \; r = 0{,}2\ \Omega, \; n = 60.$$

Intensité dans le circuit extérieur :

$$I_2 = \frac{60 \times 2}{0{,}2 + 60 \times 0{,}03}, \qquad I_2 = \mathbf{60 \text{ ampères}}.$$

Intensité dans chaque élément :

$$i = \frac{60}{60}, \qquad i = 1 \text{ ampère.}$$

Remarque I. — L'expression (3) indique que la batterie est équivalente à un générateur de f.é.m. e et de résistance intérieure $\frac{r}{n}$.

Le premier résultat est évident. La f.é.m. de la batterie est égale à la différence de potentiel entre ses bornes A et B en circuit ouvert : elle est donc égale à la f.é.m. d'un seul élément.

Le deuxième résultat montre que nous pouvons appliquer aux n dérivations comportant un générateur de résistance intérieure r, le théorème des conductances qui est démontré dans le cas de dérivations ne comportant que des résistances mortes. Ce résultat n'était pas évident. Nous l'appliquerons sans le démontrer à nouveau dans la question 3°.

Remarque II. — La comparaison des expressions (1) et (4) montre quel est celui des deux groupements qui donnera la plus forte intensité dans la résistance extérieure, suivant la valeur de cette dernière.

Dans le groupement en série, la résistance intérieure d'un élément est multipliée par le nombre n d'éléments. Dans le groupement en parallèle, c'est la résistance extérieure qui est multipliée par n. Il en résulte que le groupement en série est recommandé lorsque la résistance intérieure d'un élément est faible devant la résistance extérieure (cas du 1°) ; le groupement en parallèle est recommandé lorsque la résistance extérieure est faible devant la résistance intérieure d'un élément (cas du 2°).

3° *Groupement mixte* (fig. 3).

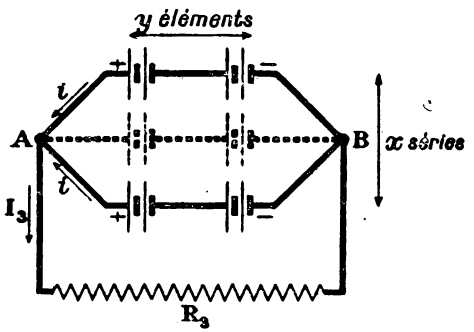


FIG. 3.

Supposons que nous groupions les n éléments en x séries de y éléments chacune. Nous avons $xy = n$.

La f.é.m. de la batterie est égale à celle d'une série, c'est-à-dire

égale à ye. Sa résistance intérieure est égale à la résistance yr d'une série, divisée par le nombre x de séries, c'est-à-dire égale à $\frac{y}{x} r$.

Si nous réunissons ses bornes aux extrémités d'une résistance R_3, l'intensité I_3 du courant débité est donnée par la loi de Pouillet :

$$ye = \left(\frac{y}{x} r + R_3\right) I_3 \quad \text{ou} \quad ne = (yr + x R_3) I_3.$$

D'où nous tirons

$$I_3 = \frac{ne}{yr + x R_3}. \tag{5}$$

Discussion.

L'intensité du courant dans la résistance extérieure est maximale lorsque le dénominateur de la fraction est minimal. Celui-ci est une somme de deux facteurs dont le produit $xyr R_3 = nr R_3$ est constant. Il est minimal lorsque les deux facteurs sont égaux :

$$yr = x R_3,$$

d'où

$$\frac{y}{x} = \frac{R_3}{r}. \tag{6}$$

Cette relation forme, avec la relation

$$xy = n,$$

un système de deux équations à deux inconnues d'où nous tirons x et y :

$$x = \sqrt{n \frac{r}{R_3}},$$

$$y = \sqrt{n \frac{R_3}{r}}.$$

L'intensité dans le circuit extérieur est donnée par la relation (5).

L'intensité dans chaque élément est $i = \frac{I_3}{x}$.

Application numérique :

$$r = 0{,}2 \text{ ohm}, \quad R_3 = 0{,}12 \text{ ohm}, \quad n = 60.$$

$$x = \sqrt{60 \times \frac{0{,}2}{0{,}12}}, \qquad x = \mathbf{10}.$$

$$y = \sqrt{60 \times \frac{0{,}12}{0{,}2}}, \qquad y = \mathbf{6}.$$

La batterie doit donc être constituée de 10 séries de 6 éléments chacune.

L'intensité I_3 dans le circuit extérieur est

$$I_3 = \frac{60 \times 2}{6 \times 0{,}2 + 10 \times 0{,}12}, \qquad \mathbf{I_3 = 50 \text{ ampères.}}$$

L'intensité du courant passant dans chaque élément est

$$i = \frac{50}{10}, \qquad \mathbf{i = 5 \text{ ampères.}}$$

4° La relation (6) peut se mettre sous la forme

$$\frac{y}{x} r = R_3.$$

Le premier membre représente la résistance intérieure de la batterie. L'intensité débitée par la batterie est donc maximale lorsque sa résistance intérieure est égale à la résistance extérieure.

Il en résulte que la quantité de chaleur dégagée pendant le temps t dans la résistance extérieure est égale à celle qui est dissipée par effet Joule dans la batterie elle-même. Elle est donnée par la loi de Joule

$$Q = \frac{1}{4{,}18} R_3 I_3^2 t.$$

Application numérique :

$R_3 = 0{,}12\ \Omega$, $I_3 = 50$ A, $t = 6$ heures ou $6 \times 3\,600$ secondes.

$$Q = \frac{1}{4{,}18} \times 0{,}12 \times 50^2 \times 6 \times 3\,600.$$

$$\mathbf{Q = 1\,550 \times 10^3 \text{ calories.}}$$

CHAPITRE XXII

Champ magnétique d'un aimant et d'un courant.

91. — Forces exercées par les pôles d'une aiguille aimantée sur les pôles d'une aiguille identique.

Deux aiguilles aimantées identiques, NS et N'S', ont pour longueur 20 centimètres. Elles portent à leurs extrémités des masses magnétiques égales, en valeur absolue, à 10 unités S.I.

1° On dispose ces aiguilles parallèlement, de façon à ce qu'elles forment un carré NSS'N'. Déterminer les quatre forces exercées par les deux pôles N et S de la première aiguille sur les pôles N' et S' de la seconde.

Montrer que la résultante des quatre forces subies par l'aimant N'S' est dirigée selon la médiatrice de N'S'. Calculer cette résultante. Quel est son sens ?

2° On retourne l'aiguille NS bout pour bout ; que devient la force résultante subie par N'S' ?

3° On dispose maintenant les deux aiguilles en croix, de sorte qu'elles constituent les diagonales d'un carré NS'SN'. Calculer la résultante des forces subies par le pôle N', puis par le pôle S'. A quoi est soumise l'aiguille N'S' ? Même question pour l'aiguille NS.

(Athènes.)

1° Désignons par m la masse magnétique, supposée ponctuelle, portée par chacun des quatre pôles, et par l la longueur des aiguilles aimantées (fig. 1).

Le pôle N exerce sur le pôle N' une force répulsive $\vec{F}$, dirigée suivant la droite NN', dont le module est donné par la formule de Coulomb :

$$F = K \frac{m \times m}{l^2} = K \frac{m^2}{l^2}.$$

Il exerce sur le pôle S' une force attractive, $\vec{F}'$, dirigée suivant la diagonale NS' du carré, et dont le module est

$$F' = K \frac{m \times m}{\overline{NS'}^2} = K \frac{m^2}{(l\sqrt{2})^2} = K \frac{m^2}{l^2 \times 2} = \frac{F}{2}.$$

De même le pôle S exerce sur le pôle S′ une force répulsive $\vec{F}$ et sur le pôle N′ une force attractive $\vec{F}'$ dont le module est

$$F' = \frac{F}{2}.$$

L'aiguille N′S′ est donc soumise à l'action de quatre forces :

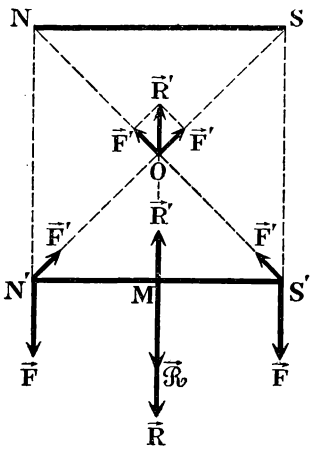


Fig. 1.

— deux forces égales, $\vec{F}$, parallèles et de même sens, appliquées aux deux pôles N′ et S′ ;

— deux forces égales, $\vec{F}'$, dirigées suivant les diagonales NS′ et SN′ du carré, dont les lignes d'action passent par le centre de symétrie O du carré.

Les deux forces $\vec{F}$ ont une résultante $\vec{R}$, ayant la direction et le sens de chacune d'elles, le module $R = 2F$, et appliquée au milieu M de N′S′.

Pour déterminer la résultante des deux forces $\vec{F}'$, faisons-les glisser sur leurs lignes d'action de façon que leur point d'application soit le centre de gravité O du carré. La résultante $\vec{R}'$ cherchée est représentée par la diagonale du parallélogramme des forces, qui est un carré. Cette résultante est donc dirigée suivant la bissectrice de l'angle N′OS′ et sa ligne d'action passe par le point M. Elle a pour module

$$R' = F'\sqrt{2} = \frac{F\sqrt{2}}{2}.$$

Faisons glisser cette force $\vec{R}'$ sur sa ligne d'action de façon que son point d'application soit en M. Les deux forces $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ ont une résultante $\vec{\mathcal{R}}$ ayant la direction de la médiatrice de N′S′, le sens de $\vec{R}$ et dont le module est

$$\mathcal{R} = R - R' = 2F - \frac{F\sqrt{2}}{2} = F\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Application numérique :

$K = 10^{-7}$, $m = 10$ unités SI, $l = 20$ cm, ou 0,20 m.

$$F = 10^{-7} \times \frac{10^2}{0{,}2^2} = \frac{10^{-5}}{0{,}04}, \qquad F = \mathbf{25 \times 10^{-5}\ N.}$$

$$F' = \frac{F}{2} = \mathbf{12{,}5 \times 10^{-5}\ N.}$$

$$\mathcal{R} = 25 \times 10^{-5} \times \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 25 \times 1{,}293 \times 10^{-5},$$

$$\mathcal{R} = \mathbf{32{,}3 \times 10^{-5}\ N.}$$

2° Si nous retournons l'aiguille aimantée NS bout pour bout (fig. 2) un raisonnement identique montre que les pôles N′ et S′ sont soumis chacun à deux forces :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F} \text{ et } \vec{F}'_1 = -\vec{F}'.$$

La résultante $\vec{R}_1$, des deux forces $\vec{F}_1$ est

$$\vec{R}_1 = -\vec{R},$$

et celle $\vec{R}'_1$ des deux forces $\vec{F}'_1$ est

$$\vec{R}'_1 = -\vec{R}'.$$

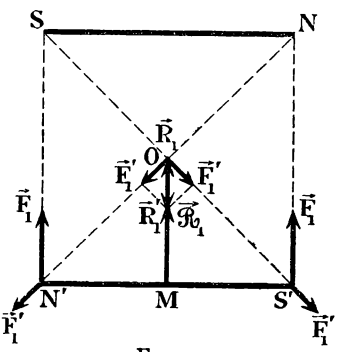


Fig. 2.

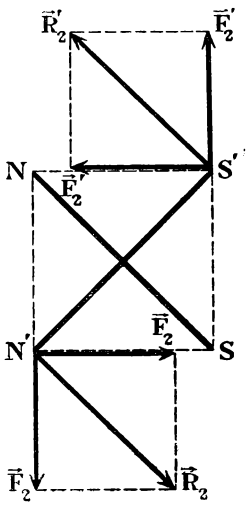


Fig. 3.

La résultante $\vec{\mathcal{R}}_1$ des quatre forces qui s'exercent sur l'aiguille aimantée est donc

$$\vec{\mathcal{R}}_1 = -\vec{\mathcal{R}}.$$

3° Si nous plaçons les deux aiguilles en croix (fig. 3), le pôle N exerce sur le pôle N′ une force répulsive, $\vec{F}_2$, dirigée suivant la droite NN′ et de module

$$F_2 = K \frac{m^2}{\overline{NN'}^2}.$$

Remarquons que la diagonale NS du carré NS′SN′ est telle que

$$NS = NN' \sqrt{2}.$$

Nous en tirons

$$NN' = \frac{NS}{\sqrt{2}} = l \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La force F_2 a donc pour module

$$F_2 = K \frac{m^2}{\left(l \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = K \frac{m^2 \times 2}{l^2} = 2\,F.$$

Le pôle N exerce, par ailleurs, sur le pôle S′ une force attractive $\vec{F'_2}$, dirigée suivant la droite NS′, dont le module est

$$F'_2 = K \frac{m^2}{\overline{NS'}^2} = K \frac{m^2}{\left(l \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\,F.$$

De même, le pôle S exerce sur le pôle N′ une force attractive $\vec{F_2}$ de module $F_2 = 2\,F$ et sur le pôle S′ une force répulsive $\vec{F'_2}$ de module $F'_2 = 2\,F$.

Le pôle N′ est donc soumis à l'action de deux forces concourantes, rectangulaires, de module $F_2 = 2\,F$. La résultante $\vec{R_2}$ de ces deux forces est dirigée perpendiculairement à l'aiguille N′S′ et a pour module

$$R_2 = F_2 \sqrt{2} = 2\,F \sqrt{2}.$$

Le pôle S′ est également soumis à l'action de deux forces rectangulaires de module $F'_2 = 2\,F$. La résultante $\vec{R'_2}$ de ces deux forces est dirigée perpendiculairement à l'aiguille N′S′ et a pour module

$$R'_2 = 2\,F \sqrt{2}.$$

L'aiguille N′S′ est donc soumise à l'action de deux forces, $\vec{R_2}$ et $\vec{R'_2}$, de même module, parallèles, et de sens contraire.

Ces deux forces constituent un couple de moment

$$\mathfrak{M} = R_2 \times l = 2 \sqrt{2}\,Fl.$$

Application numérique :

$$F = 25 \times 10^{-5}\ \text{N}, \quad l = 0{,}20\ \text{m}.$$

$$\mathfrak{M} = 2 \times 1{,}414 \times 25 \times 10^{-5} \times 0{,}20,$$

$$\mathbf{M = 14{,}14 \times 10^{-5}\ unités\ SI.}$$

92. — Champ magnétique d'un aimant.

On dispose d'un barreau aimanté rectiligne NS. Soit *m* la masse magnétique Nord supposée localisée dans l'extrémité N. Une masse magnétique Sud égale en

valeur absolue est supposée localisée dans l'extrémité S. On désignera par M le milieu du barreau.

1° La longueur du barreau étant 10 cm, calculer en fonction de m les intensités des champs d'induction magnétique produits en un point A situé sur l'axe NS de l'aimant à 40 cm de M et à 35 cm de N ;

***a)* par le pôle Nord ;**

***b)* par le pôle Sud ;**

***c)* par l'aimant entier.**

Représenter les inductions par des vecteurs.

2° L'aimant étant placé perpendiculairement au méridien magnétique, on considère une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical, placée en A. On observe qu'en retirant l'aimant NS la petite aiguille dévie de 45°. Déterminer la masse magnétique m.

Composante horizontale de l'induction magnétique terrestre : $0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla.

3° On considère un point B dans le plan perpendiculaire à l'aimant passant par M situé à une distance de 40 cm de M. Calculer les intensités des inductions magnétiques produites en B :

***a)* par le pôle Nord N ;**

***b)* par le pôle Sud S ;**

***c)* par l'aimant entier.**

(Poitiers.)

Nous utiliserons le système international.

1° Désignons par $2l$ la longueur du barreau et plaçons au point A, situé à la distance d du point M, sur la droite NS, une masse magnétique Nord m' égale à l'unité (fig. 1).

a) La masse magnétique $+ m$, localisée en N, exerce sur la masse magnétique $+ m'$ une force de répulsion $\vec{F}_1$. Elle crée au point A

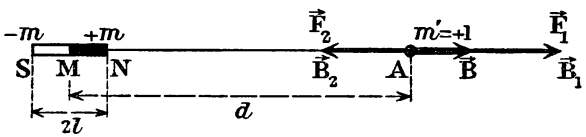


FIG. 1.

une induction magnétique $\vec{B}_1$ définie par la relation vectorielle

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m'}.$$

m' étant égale à $+ 1$, le vecteur $\vec{B}_1$ se confond avec le vecteur $\vec{F}_1$.

Son point d'application est le point A ; sa direction, celle de la

droite NA ; son sens, celui de N vers A ; son intensité est numériquement égale à celle de $\vec{F}_1$.

Cette dernière est donnée par la loi de Coulomb :

$$F_1 = 10^{-7} \times \frac{m \times m'}{NA^2}.$$

$$B_1 = \frac{F_1}{m'} = 10^{-7} \times \frac{m}{(d-l)^2}.$$

Application numérique :

$$d = 40 \text{ cm ou } 0{,}40 \text{ m}, \quad l = \frac{NS}{2} = \frac{10}{2} \text{ cm ou } 0{,}05 \text{ m}.$$

$$B_1 = 10^{-7} \times \frac{m}{(0{,}40 - 0{,}05)^2} = 10^{-7} \times \frac{m}{0{,}35^2}.$$

$$B_1 = 10^{-3} \times \frac{m}{1\,225}, \qquad B_1 = 10^{-6} \times 0{,}816\,3 \times m \text{ tesla}.$$

b) La masse magnétique $-m$, localisée en S, exerce sur la masse magnétique $+m'$ une force d'attraction $\vec{F}_2$. Elle crée au point A une induction magnétique $\vec{B}_2$ définie par la relation vectorielle

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m'}.$$

m' étant égale à $+1$ le vecteur $\vec{B}_2$ se confond avec le vecteur $\vec{F}_2$.

Son point d'application est le point A ; sa direction, celle de la droite SA ; son sens, celui de A vers S ; son intensité est numériquement égale à celle de $\vec{F}_2$.

Cette dernière est donnée par la loi de Coulomb :

$$F_2 = 10^{-7} \times \frac{m \times m'}{SA^2}.$$

$$B_2 = \frac{F_2}{m'} = 10^{-7} \times \frac{m}{(d+l)^2}.$$

Application numérique :

$$d = 0{,}40 \text{ m}, \quad l = 0{,}05 \text{ m},$$

$$B_2 = 10^{-7} \times \frac{m}{(0{,}40 + 0{,}05)^2} = 10^{-7} \times \frac{m}{0{,}45^2},$$

$$B_2 = 10^{-3} \times \frac{m}{2\,025}, \qquad B_2 = 10^{-6} \times 0{,}493\,8 \times m \text{ tesla}.$$

c) L'induction magnétique $\vec{B}$ créée par l'aimant entier au point A est la somme géométrique des inductions $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Sa direction est celle des deux inductions composantes; son sens, celui de $\vec{B}_1$; son module, la différence des modules B_1 et B_2.

$$B = B_1 - B_2.$$

Application numérique :

$$B = 10^{-3} \times \frac{m}{1\,225} - 10^{-3} \times \frac{m}{2\,025}.$$

$$B = 10^{-3} \times \frac{m}{3\,100} = 10^{-6} \times 0{,}322\,5 \times m \text{ tesla}.$$

2° La petite aiguille aimantée *ns* (fig. 2), mobile autour d'un axe vertical perpendiculaire au plan de la figure au point A, est soumise à deux inductions perpendiculaires :

— l'induction $\vec{B}$ créée par l'aimant et dont le module est

$$B = 10^{-3} \times \frac{m}{3\,100} \text{ tesla},$$

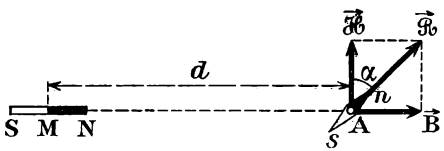


FIG. 2.

— l'induction terrestre, dont la composante horizontale $\vec{\mathcal{H}}$ a pour module

$$\mathcal{H} = 10^{-4} \times 0{,}2 \text{ tesla}.$$

Elle prend la direction de leur résultante $\vec{\mathcal{R}}$ et forme, avec le méridien magnétique, un angle α tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{\mathcal{H}} = \frac{10^{-3} \times m}{3\,100 \times 10^{-4} \times 0{,}2} = \frac{m}{62}.$$

Lorsqu'on retire l'aimant, la petite aiguille prend la direction du méridien magnétique et dévie de l'angle α.

L'expression précédente fournit la valeur de m :

$$m = 62 \times \operatorname{tg} \alpha.$$

Application numérique :

$$\alpha = 45^0, \quad \operatorname{tg}\alpha = 1,$$
$$m = 62 \text{ USI.}$$

3° Plaçons au point A' situé à la distance d du milieu M de l'aimant (fig. 3), une masse magnétique Nord égale à l'unité.

a) Le pôle N exerce sur cette masse magnétique unité une force $\vec{F}_1$ qui représente, par définition, l'induction $\vec{B}$, créé par ce pôle au point A'.

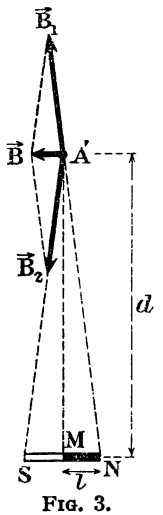


FIG. 3.

La direction de $\vec{B}_1$ est celle de la droite NA'; son sens, celui de N vers A' (force répulsive); son module est donné par la loi de Coulomb :

$$B_1 = 10^{-7} \times \frac{m}{NA'^2}, \quad B_1 = 10^{-7} \frac{m}{d^2 + l^2}.$$

Application numérique :

$m = 62$ USI, $\quad d = 0{,}40$ m, $\quad l = 0{,}05$ m,

$$B_1 = \frac{10^{-7} \times 62}{0{,}40^2 + 0{,}05^2}, \quad B_1 = 10^{-4} \times 0{,}381 \text{ tesla.}$$

b) Le pôle S exerce sur la masse magnétique unité une force $\vec{F}_2$, qui représente, par définition, l'induction $\vec{B}_2$ créé par ce pôle au point A'.

La direction de $\vec{B}_2$ est celle de la droite SA'; son sens, celui de A' vers S (force attractive); son intensité est donnée par la loi de Coulomb

$$B_2 = 10^{-7} \times \frac{m}{SA'^2}, \qquad B_2 = 10^{-7} \times \frac{m}{d^2 + l^2}.$$

Application numérique :

$$B_2 = B_1, \qquad B_2 = 10^{-4} \times 0{,}381 \text{ tesla.}$$

c) L'induction $\vec{B}$ créée par l'aimant entier au point A' est la somme géométrique des inductions $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

L'induction $\vec{B}$ est donc représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{B_1}$ et $\vec{B_2}$.

Remarquons que les angles BB_2A' et $NA'S$ sont égaux comme alternes-internes. Les triangles isocèles BB_2A' et $NA'S$ sont donc semblables et nous pouvons écrire la relation

$$\frac{A'B}{NS} = \frac{A'B_2}{A'N}, \quad \text{ou} \quad \frac{B}{2l} = \frac{B_2}{\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

L'induction créée par l'aimant entier en A' a pour module

$$B = B_2 \frac{2l}{\sqrt{d^2 + l^2}} = 10^{-7} \times \frac{m}{d^2 + l^2} \times \frac{2l}{\sqrt{d^2 + l^2}} = 10^{-7} \frac{2l \times m}{(d^2 + l^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Application numérique :

$$2l = 0{,}10\,\text{m}, \quad m = 62\ \text{USI},$$
$$d^2 + l^2 = 0{,}40^2 + 0{,}05^2 = 0{,}162\,5.$$
$$B = 10^{-7} \times \frac{0{,}10 \times 62}{(0{,}162\,5)^{\frac{3}{2}}}, \qquad B = 10^{-4} \times 0{,}0946 \text{ tesla}.$$

93. — Champ magnétique d'un courant rectiligne.

Une petite aiguille aimantée horizontale NS pouvant tourner autour d'un axe vertical passant par son centre est disposée à une certaine distance d'un long fil vertical conducteur. Lorsqu'il ne passe aucun courant dans le fil, la demi-droite NS rencontre le fil. (La distance de l'aimant au fil est grande par rapport aux dimensions de l'aiguille.)

1° Dans quel sens est déviée l'aiguille quand un courant ascendant parcourt le fil ?

2° Sachant que la composante horizontale de l'induction magnétique terrestre vaut 0.2×10^{-4} tesla et que l'aiguille a tourné de 1°, calculer l'intensité de l'induction magnétique produite par le courant au voisinage de l'aiguille.

3° L'intensité du courant était 0,3 ampère. Quel courant faut-il maintenant faire passer dans le fil pour que la déviation soit de 45° ? Quelle est alors l'intensité de l'induction magnétique résultante au voisinage de l'aiguille ?

4° Conservant cette dernière intensité de courant et laissant le fil vertical, on fait tourner celui-ci de 30° autour du centre de l'aiguille à partir de sa position primitive dans un sens, puis dans l'autre. De quel angle tourne l'aiguille dans chaque cas ?

(Paris.)

1° L'aiguille aimantée ne peut se mouvoir que dans le plan horizontal contenant son centre A.

Lorsqu'il ne passe aucun courant dans le fil, cette aiguille n'est soumise, dans ce plan, qu'à la composante horizontale $\vec{\mathcal{H}}$ de l'induction

magnétique terrestre, dont elle donne la direction et le sens. Nous pouvons représenter cette composante par un vecteur, ayant comme origine le point A (fig. 1).

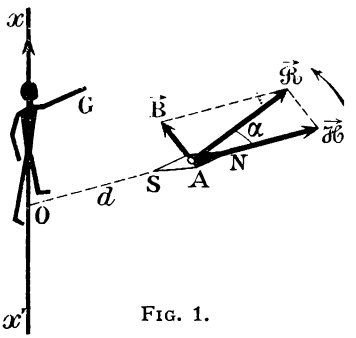


FIG. 1.

Lorsque le courant circule dans le fil, dans le sens ascendant, l'aiguille est soumise dans le plan horizontal passant par A à une deuxième induction magnétique $\vec{B}$, perpendiculaire à la première, dont le sens est donné par la règle de l'observateur d'Ampère : elle est dirigée vers la gauche, G, de cet observateur, regardant le point A. Elle est, comme la première, représentée par un vecteur ayant pour origine le point A.

Les deux inductions $\vec{B}$ et $\vec{\mathcal{H}}$ ont une résultante, $\vec{\mathcal{R}}$, égale à leur somme géométrique. L'aiguille aimantée tend à prendre la direction de $\vec{\mathcal{R}}$. Elle tourne donc dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

2° Lorsque l'aiguille a pris sa position d'équilibre, elle a tourné d'un angle α tel que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{\mathcal{H}} \quad \text{(fig. 2)}.$$

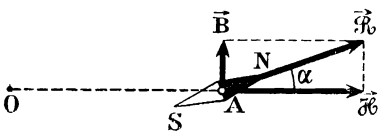


FIG. 2.

Nous en tirons

$$B = \mathcal{H} \operatorname{tg}\alpha.$$

Si l'angle α, exprimé en radians, est un petit angle, il peut être confondu avec sa tangente :

$$B = \mathcal{H} \times \alpha.$$

Application numérique :

$$\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4} \text{ tesla}, \quad \alpha = 1^\circ \text{ ou } \frac{\pi}{180} \text{ radian}.$$

$$B = \frac{0{,}2 \times 10^{-4} \times \pi}{180} = \frac{10^{-4} \times \pi}{900},$$

$$B = 0{,}349 \times 10^{-6} \text{ tesla}.$$

3° L'induction magnétique créée par le courant au point A est proportionnelle à l'intensité de ce courant. Si nous désignons par B' l'induction correspondant à l'intensité I' et par α' l'angle de déviation de l'aiguille, nous pouvons écrire

$$\frac{I'}{I} = \frac{B'}{B} = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Nous en tirons

$$I' = I\,\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \text{et} \quad B' = B\,\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

L'induction résultante $\vec{\mathcal{R}}'$ est la somme géométrique des inductions $\vec{B}'$ et $\vec{\mathcal{H}}$ (fig. 3). Son module est donné par l'expression

$$\mathcal{R}' = \sqrt{B'^2 + \mathcal{H}^2}.$$

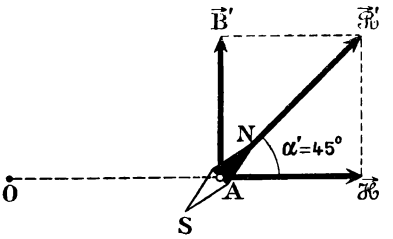


FIG. 3.

Application numérique :

$I = 0{,}3$ ampère, $\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$,

$B = \dfrac{10^{-4}\times\pi}{900}$ tesla.

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\pi}{180}} = \frac{180}{\pi}.$$

$$I' = 0{,}3 \times \frac{180}{\pi}, \qquad \mathbf{I' = 17{,}2\ ampères.}$$

$$B' = \frac{10^{-4}\times\pi}{900} \times \frac{180}{\pi}, \qquad B' = 0{,}2 \times 10^{-4}\ \text{tesla} = \mathcal{H}, \quad \text{(fig. 3)}$$

$$\mathcal{R}' = 10^{-4}\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} = 10^{-4}\times 0{,}2\sqrt{2}, \qquad \mathcal{R}' = \mathbf{0{,}283\times 10^{-4}\ tesla.}$$

4° Lorsque l'on fait tourner le fil d'un angle β autour de A le vecteur $\vec{B}'$ tourne du même angle β autour de A, soit dans un sens soit dans l'autre.

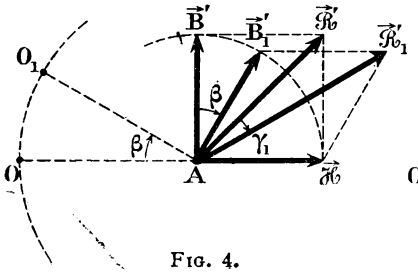


FIG. 4.

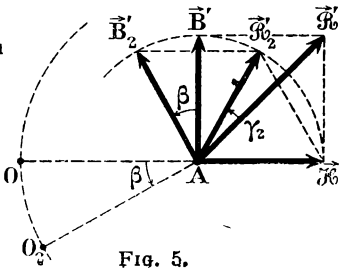


FIG. 5.

Si le fil a tourné dans le sens OO_1 (fig. 4), l'induction créée par le courant est représentée par le vecteur $\vec{B'}_1$ formant avec $\vec{\mathcal{H}}$ l'angle $90^0 - \beta$.

S'il a tourné dans le sens OO_2 (fig. 5), cette induction est représentée par le vecteur $\vec{B'}_2$ formant avec $\vec{\mathcal{H}}$ l'angle $90^0 + \beta$.

Dans le premier cas, l'induction résultante $\vec{\mathcal{R}'}_1$ forme avec l'induction $\vec{\mathcal{H}}$ l'angle $\frac{90^0 - \beta}{2} = 45^0 - \frac{\beta}{2}$. L'aiguille a donc tourné de l'angle

$$\gamma_1 = 45^0 - \left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right) = + \frac{\beta}{2}.$$

Dans le second cas, l'induction résultante $\vec{\mathcal{R}'}_2$ forme avec l'induction $\vec{\mathcal{H}}$ l'angle $\frac{90^0 + \beta}{2} = 45^0 + \frac{\beta}{2}$. L'aiguille a donc tourné de l'angle

$$\gamma_2 = 45^0 - \left(45^0 + \frac{\beta}{2}\right) = - \frac{\beta}{2}.$$

Numériquement : $\beta = 30^0$,

$\gamma_1 = + 15^0$ (rotation dans le sens des aiguilles d'une montre).

$\gamma_2 = - 15^0$ (rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).

94. — Etude d'une boussole des tangentes.

Une aiguille aimantée est suspendue par un fil sans torsion au centre d'une bobine plate formée de 10 spires circulaires, de rayon 5 cm, situées dans le plan du méridien magnétique. La composante horizontale de l'induction terrestre est $0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla.

1° La bobine est placée dans un circuit parcouru par un courant I. L'aiguille tourne de 45°. Quelle est la valeur de I ?

2° On place en dérivation sur la bobine, une résistance de 0,1 ohm. Le courant I dans le reste du circuit n'ayant pas varié, l'aiguille fait maintenant un angle de 30°, au lieu de 45°, avec sa position primitive. Quelle est la résistance de la bobine ?

3° La bobine, retirée du circuit précédent, est mise en série avec une résistance de 100 ohms. L'ensemble est utilisé comme voltmètre. Quelles valeurs de la d. d. p. à ses bornes doit-il indiquer pour des rotations de l'aiguille de 30° et de 45° ?

(Égypte.)

1° L'aiguille aimantée, dont le milieu coïncide avec le centre O de la bobine plate, est mobile autour d'un axe vertical. On suppose qu'elle se meut dans un plan horizontal.

Lorsque le courant ne circule pas dans le fil, elle est soumise, dans ce plan, à la composante horizontale $\vec{\mathcal{H}}$ de l'induction magnétique terrestre dont elle prend la direction.

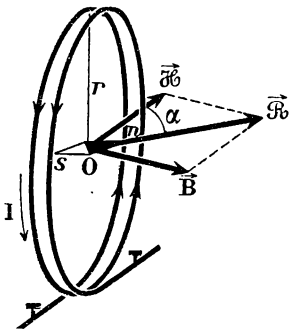


FIG. 1.

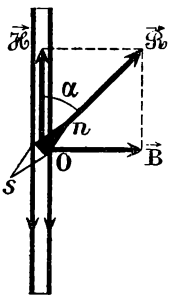


FIG. 2.

Lorsque le courant d'intensité I ampères circule dans le fil, il crée au centre de la bobine une induction $\vec{B}$ ainsi définie :

— direction : perpendiculaire au plan de la bobine,

— sens : donné, par exemple, par la règle de l'observateur d'Ampère (le champ est dirigé vers la gauche de l'observateur regardant le centre O);

— module : donné en teslas par la formule

$$B = 10^{-7} \times 2\pi \frac{N}{r} I,$$

dans laquelle N désigne le nombre des spires de la bobine et r leur rayon, exprimé en mètres.

Les inductions $\vec{\mathcal{H}}$ et $\vec{B}$ ont une résultante $\vec{\mathcal{R}}$ égale à leur somme géométrique. L'aiguille se place dans la direction de $\vec{\mathcal{R}}$ et tourne d'un angle α (fig. 1 et 2) tel que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{\mathcal{H}} = 10^{-7} \times 2\pi \frac{N}{r} \times \frac{I}{\mathcal{H}}.$$

Nous en tirons

$$I = \frac{r}{N} \times \frac{\mathcal{H}}{10^{-7}} \times \frac{1}{2\pi} \times \operatorname{tg}\alpha. \qquad (1)$$

Application numérique :

$r = 5$ cm, ou 0,05 m, $\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla, $N = 10$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}45^0 = 1$.

$$I = \frac{0{,}05}{10} \times \frac{0{,}2 \times 10^{-4}}{10^{-7}} \times \frac{1}{2\pi} \times 1 = \frac{1}{2\pi},$$

$$\mathbf{I = 0{,}159\ A.}$$

2° Désignons par R et R′ les résistances de la bobine et du conducteur en dérivation et par i et i' les intensités des courants circulant dans les deux circuits dérivés (fig. 3).

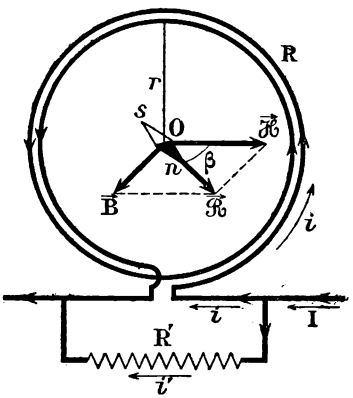


FIG. 3.

L'intensité du courant dans le circuit principal n'a pas changé. La loi de la conservation de l'intensité donne

$$I = i + i'.$$

La loi d'Ohm appliquée aux deux dérivations donne d'autre part

$$Ri = R'i'.$$

Nous tirons de ces relations

$$R = R' \frac{i'}{i} = R' \frac{I - i}{i}. \qquad (2)$$

La formule (1) montre par ailleurs que l'intensité du courant est proportionnelle à la tangente de l'angle de rotation de l'aiguille (d'où le nom de boussole des tangentes donné à cet appareil). A l'intensité i correspond l'angle de rotation donné, β. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{i}{I} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha},$$

d'où nous tirons

$$i = I \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (3)$$

En portant cette valeur dans (2) nous obtenons

$$R = R' \frac{I - I\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}{I\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}}$$

et, par suite,
$$R = R' \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Application numérique :

$$R' = 0{,}1\ \Omega, \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$R = 0{,}1 \times \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 0{,}1\,(\sqrt{3} - 1), \qquad \mathbf{R = 0{,}073\,2\ \Omega.}$$

3° Lorsque la bobine est mise en série avec la résistance donnée $R_1 = 100\ \Omega$, l'ensemble a une résistance égale à $R + R_1$.

Si cet ensemble est parcouru par le courant d'intensité I correspondant à l'angle de rotation $\alpha = 45^\circ$, il présente entre ses bornes une différence de potentiel

$$V = (R + R_1)\, I.$$

A l'angle de rotation $\beta = 30^\circ$ correspond l'intensité i donné par l'expression (3).

L'appareil présente alors entre ses bornes la différence de potentiel

$$v = (R + R_1)\, i.$$

Application numérique :

$$R = 0{,}073\,2\ \Omega, \quad R_1 = 100\ \Omega, \quad R + R_1 \approx 100\ \Omega, \quad I = 0{,}159\ \text{A}.$$

$$V = 100 \times 0{,}159, \qquad \mathbf{V = 15{,}9\ volts.}$$

$$i = 0{,}159 \times \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 0{,}159 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} = 0{,}091\,7\ \text{A}.$$

$$v = 100 \times 0{,}091\,7, \qquad \mathbf{v = 9{,}17\ volts.}$$

95. — Champ magnétique d'un solénoïde. Action sur une aiguille aimantée.

Un petit aimant rectiligne, NS, suspendu par un fil sans torsion, est placé au centre A d'un solénoïde de cuivre dont l'axe est perpendiculaire au plan du méridien magnétique en A.

1° Le petit aimant ayant pris sa position d'équilibre, on établit dans le solénoïde un courant d'intensité $i = 0{,}1$ milliampère. Calculer de quel angle α, exprimé en radians, l'aimant NS doit tourner pour atteindre sa nouvelle position d'équilibre, sachant que le solénoïde comporte 400 spires réparties sur une longueur de 10 cm et que la composante horizontale de l'induction terrestre est $0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla au point considéré.

2° L'aimant NS entraîne dans son mouvement un petit miroir concave formant l'image nette d'une fente lumineuse sur une règle graduée située à 100 cm du miroir. Quel est le déplacement de cette image produit par le passage du courant précédent dans le solénoïde ?

3° On admet que l'on peut observer tout déplacement de l'image supérieur à 0,25 mm. Quelle est la valeur minimale de l'intensité du courant que l'on peut ainsi déceler ?

4° La résistance du solénoïde est 50 ohms. Quel déplacement observera-t-on si l'on établit une différence de potentiel de 0,01 volt aux bornes du solénoïde ?

(Réunion.)

1° Nous supposons que le petit aimant se meut dans le plan horizontal passant par le centre A du solénoïde (plan de la fig. 1).

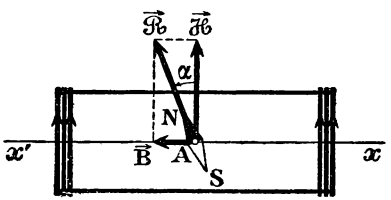


FIG. 1.

Lorsque le courant ne passe pas, l'aimant est soumis, dans ce plan, à la composante horizontale $\vec{\mathcal{H}}$ de l'induction terrestre, perpendiculaire à l'axe $x'x$ du solénoïde.

Le courant d'intensité i ampères crée à l'intérieur du solénoïde une induction uniforme, si nous supposons toutefois que le diamètre du solénoïde est faible devant sa longueur.

L'induction $\vec{B}$ ainsi créée a pour direction celle de l'axe $x'x$. Son sens est donné, par exemple, par la règle d'Ampère : c'est celui de la gauche de l'observateur d'Ampère regardant l'intérieur du solénoïde.

Son intensité en teslas est donnée en fonction de l'intensité i et du nombre n_1 de spires par mètre de longueur par la formule

$$B = 10^{-7} \times 4\pi n_1 i.$$

Le solénoïde comporte N spires, réparties sur une longueur de l mètres :

$$n_1 = \frac{N}{l} \quad \text{et} \quad B = 10^{-7} \times 4\pi \frac{N}{l} i.$$

Les deux inductions $\vec{\mathcal{H}}$ et $\vec{B}$ ont une résultante $\vec{\mathcal{R}}$, égale à leur somme géométrique. L'aimant tend à se placer parallèlement au champ résultant $\vec{\mathcal{R}}$. Il tourne donc, en sens inverse des aiguilles d'une montre, d'un angle α tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B}{\mathcal{H}} = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{N}{l} \times \frac{i}{\mathcal{H}}.$$

Application numérique : $\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla, $i = 0{,}1$ mA ou 0,000 1 A, $N = 400$, $l = 10$ cm, ou 0,1 m.

$$\operatorname{tg} \alpha = 10^{-7}\, 4\pi \times \frac{400}{0{,}1} \times \frac{0{,}000\ 1}{0{,}2 \times 10^{-4}} = \frac{8\pi}{1\ 000}.$$

Cette tangente est celle d'un petit angle. Nous pouvons la confondre avec la valeur de l'angle en radian.

$$\alpha = \frac{8\pi}{1\ 000} = 0{,}025, \qquad \alpha = \mathbf{0{,}025\ radian.}$$

2° Lorsque le courant ne passe pas, le miroir m donne de la fente F une image F′ sur la règle graduée, dont nous connaissons la distance D au miroir.

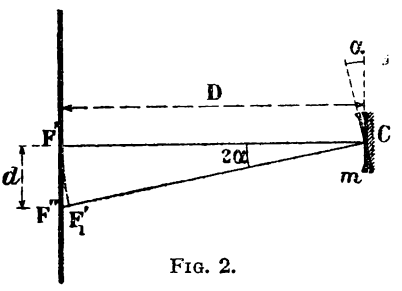


FIG. 2.

Lorsque le courant passe, l'aimant, et par suite le miroir, tourne d'un angle α. L'image F′ de la fente décrit un arc de cercle de rayon D et vient en F'_1 tel que $\widehat{F'CF'_1} = 2\alpha$.

L'angle α étant très petit, nous pouvons confondre l'arc $F'F'_1$ avec sa tangente $F'F''$, ce qui revient à confondre le point F'_1 et le point F'' situé sur la règle. L'image F' s'est donc déplacée de

$$d = F'F'' = \widehat{F'F'_1} = D \times 2\alpha.$$

Application numérique :

$$D = 100 \text{ cm}, \quad \alpha = \frac{8\pi}{1\,000} \text{ radian.}$$

$$d = 100 \times 2 \times \frac{8\pi}{1\,000} = 1{,}6\pi \text{ cm}, \qquad d \approx \mathbf{5{,}03\ cm.}$$

3° Le déplacement de l'image sur la règle est proportionnel à l'angle de rotation du miroir, donc à l'intensité du courant qui circule dans le fil. Au déplacement minimal d_m donné correspond la valeur minimale i_m de l'intensité du courant que l'on peut déceler avec cet appareil. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{i_m}{i} = \frac{d_m}{d},$$

d'où nous tirons

$$i_m = i\,\frac{d_m}{d}.$$

Application numérique :

$$i = 0{,}1 \text{ mA}, \quad d = 1{,}6 \times \pi \text{ cm}, \quad d_m = 0{,}25 \text{ mm ou } 0{,}025 \text{ cm},$$

$$i_m = 0{,}1 \times \frac{0{,}025}{1{,}6 \times \pi} = 0{,}5 \times 10^{-3} \text{ mA}, \quad i_m = \mathbf{0{,}5 \times 10^{-6}\ A.}$$

4° Si l'on établit une différence de potentiel V aux bornes du solénoïde de résistance R ohms, l'intensité du courant circulant dans le fil est, d'après la loi d'Ohm,

$$i_1 = \frac{V}{R},$$

et nous pouvons écrire entre les distances d_1 et d correspondant aux intensités i_1 et i la relation

$$\frac{d_1}{d} = \frac{i_1}{i};$$

d'où

$$d_1 = d\,\frac{i_1}{i} = d\,\frac{V}{R\,i}.$$

Application numérique :

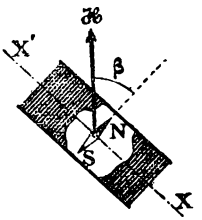
V = 10 millivolts, R = 50 ohms, $i = 0{,}1$ milliampère, $d = 1{,}6\,\pi$ cm.

$$d_1 = 1{,}6\,\pi \times \frac{10}{50 \times 0{,}1} = 3{,}2\,\pi \text{ cm},$$

$$d_1 = \mathbf{10{,}05\ cm.}$$

96. — Action sur une aiguille aimantée d'un solénoïde mobile autour d'un axe vertical.

Une aiguille aimantée mobile autour d'un axe vertical est placée à l'intérieur d'un solénoïde d'axe horizontal X'X. On peut orienter le solénoïde en faisant tourner autour d'un axe géométrique qui coïncide avec celui de l'aiguille.



1° L'axe du solénoïde est orienté perpendiculairement à la direction de l'aiguille aimantée. On lance un courant i dans le solénoïde. De quel angle α tourne l'aiguille aimantée ?

Application numérique : composante horizontale de l'induction magnétique terrestre $\mathcal{H}$: $0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla.

Nombre de spires du solénoïde : 1 000.

Longueur du solénoïde : 120 cm.

Intensité du courant : $i = 10$ milliampères.

2° Le courant précédent étant maintenu, on fait tourner le solénoïde à partir de la position actuelle jusqu'à ce que l'aiguille aimantée se trouve parallèle au plan des spires. Calculer à ce moment l'angle β que forme l'aiguille avec le méridien magnétique. Combien y a-t-il de positions du solénoïde répondant à cette question ?

3° On augmente progressivement la valeur de i. A partir de quelle intensité devient-il impossible de trouver une orientation du solénoïde répondant à la deuxième question ? *(Toulouse.)*

Nous supposerons, dans tout le problème, que le courant qui circule dans le solénoïde produit une induction $\vec{B}$ dirigée de X' vers X.

1° Lorsque aucun courant ne traverse le solénoïde, l'aiguille aimantée, qui est mobile autour d'un axe vertical, est en équilibre

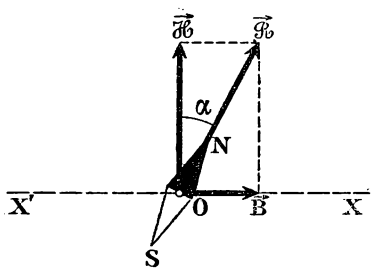


FIG. 1.

dans la direction de la composante horizontale $\vec{\mathcal{H}}$ de l'induction magnétique terrestre. L'axe X'X du solénoïde est alors perpendiculaire à $\vec{\mathcal{H}}$ (fig. 1).

Le courant i produit dans le solénoïde une induction $\vec{B}$. L'aiguille aimantée se place en équilibre dans la direction de $\vec{\mathcal{R}}$, résultante des

deux inductions $\vec{\mathcal{H}}$ et $\vec{B}$. Elle tourne d'un angle α donné par la relation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{\mathcal{H}}. \qquad (1)$$

L'induction B à l'intérieur du solénoïde est donnée en fonction du nombre de spires par mètre de longueur, $\frac{N}{L}$, et de l'intensité i en ampères par l'expression

$$B = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{N}{L} \times i \text{ tesla.}$$

La relation (1) s'écrit

$$\operatorname{tg}\alpha = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{N}{L} \times \frac{i}{\mathcal{H}};$$

on peut en déduire α.

Application numérique : N = 1 000 spires, L = 120 cm, ou 1,20 m, i = 10 mA ou 0,010 A, $\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla.

$$\operatorname{tg}\alpha = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{1\,000}{1{,}20} \times \frac{0{,}010}{0{,}2 \times 10^{-4}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}523\,6.$$

La table des valeurs naturelles des lignes trigonométriques donne α :

$$\alpha = 27^{\circ}\,38'.$$

2° Si l'on veut, sans changer i ou B, que l'aiguille aimantée devienne parallèle au plan des spires, c'est-à-dire perpendiculaire

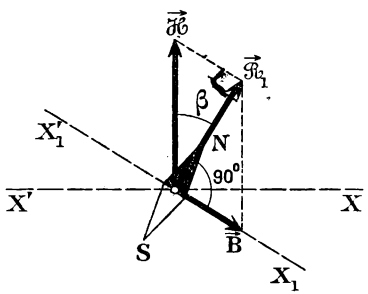


FIG. 2.

à l'axe du solénoïde, il faut amener cet axe de la position X'X à la position X'_1X_1 (fig. 2). L'aiguille aimantée, qui est toujours orientée suivant la résultante $\vec{\mathcal{R}}_1$ des deux inductions $\vec{\mathcal{H}}$ et $\vec{B}$, fait avec le méridien magnétique l'angle β.

La figure 2 donne la relation

$$B = \mathcal{H} \sin \beta,$$

qui définit l'angle β :

$$\sin\beta = \frac{B}{\mathcal{H}}. \qquad (2)$$

Si nous rapprochons les deux relations (1) et (2) nous avons

$$\sin\beta = \operatorname{tg}\alpha = 0{,}523\,6.$$

La table des valeurs naturelles des lignes trigonométriques donne β :

$$\beta = 31^\circ\,30'.$$

Faisons croître de o à 360° l'angle $\mathcal{H}OB = \theta$ de l'axe du solénoïde avec le méridien magnétique. La direction de la résultante $O\mathcal{R}$ des deux inductions $O\mathcal{H}$ et OB, donc celle de l'aiguille aimantée, varie (fig. 3).

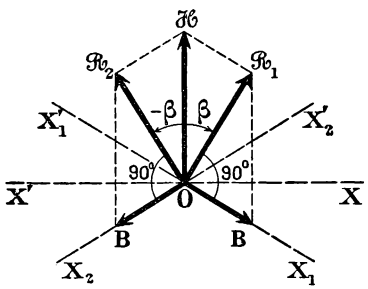


FIG. 3.

L'angle $\mathcal{H}O\mathcal{R}$, nul pour $\theta = o$, augmente avec θ, prend la valeur $\alpha = 27^\circ\,38'$ pour $\theta = 90^\circ$, atteint la valeur $\beta = 31^\circ\,30'$ pour $\theta = 90^\circ + \beta$, diminue ensuite et devient nul pour $\theta = 180^\circ$. θ change de signe pour cette valeur, croît en valeur absolue, atteint la valeur $-\beta = -31^\circ\,30'$ pour $\theta = 270^\circ - \beta$ et diminue ensuite jusqu'à la valeur o.

Il y a donc deux positions du solénoïde répondant à la question :

pour $\theta = 90 + \beta = 90 + 31^\circ\,30' = 121^\circ\,30'$,

et pour $\theta = 270^\circ - \beta = 270^\circ - 31^\circ\,30' = 238^\circ\,30'$,

l'axe du solénoïde occupant respectivement les positions X'_1X_1 et X'_2X_2;

l'aiguille aimantée, parallèle au plan des spires, est orientée respectivement suivant $O\mathcal{R}_1$ et $O\mathcal{R}_2$.

3° En augmentant progressivement la valeur de i on augmente aussi celle de B. Si l'on veut que l'aiguille aimantée soit parallèle aux spires du solénoïde, la relation (2), $\sin\beta = \frac{B}{\mathcal{H}}$, doit être satisfaite : $\sin\beta$ augmente en même temps que B sans pouvoir dépasser la valeur maximale 1.

Pour que le problème soit possible il faut donc réaliser la condition

$$\sin \beta \leqslant 1$$

ou

$$\frac{B}{\mathcal{H}} \leqslant 1.$$

Exprimant B en fonction de i, nous avons

$$10^{-7} \times 4\pi \times \frac{N}{L} \times \frac{i}{\mathcal{H}} \leqslant 1.$$

La valeur maximale de i est i_m telle que

$$10^{-7} \times 4\pi \times \frac{N}{L} \times \frac{i_m}{\mathcal{H}} = 1,$$

d'où

$$i_m = \frac{1}{10^{-7} \times 4\pi} \times \frac{L}{N} \times \mathcal{H}.$$

Application numérique :

$$L = 120 \text{ m}, \quad N = 1\,000, \quad \mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4} \text{ tesla}.$$

$$i_m = \frac{1}{10^{-7} \times 4\pi} \times \frac{1{,}2}{1\,000} \times 0{,}2 \times 10^{-4} = \frac{6}{100\pi} = 0{,}0191 \text{ A},$$

$$i_m = \mathbf{19{,}1 \text{ mA}}.$$

97. — Étude d'un circuit comportant un voltamètre et un solénoïde en série.

A) **On dispose en série entre A et B :**

a) **un voltamètre de résistance R = 8 ohms ;** *b*) **un solénoïde de résistance** $r = 2$ **ohms, comportant 10 spires par cm de longueur, la surface d'une spire étant égale à 25 cm².**

Les fils de connexion ont une résistance négligeable.

On applique entre A et B une tension constante de 2 volts. Le flux qui traverse une spire de la bobine (dans la région centrale) est égal à $14{,}2 \times 10^{-8}$ **weber. On demande de calculer :**

1° l'intensité du courant dans le circuit ;

2° les différences de potentiel aux bornes de la bobine et du voltamètre ;

3° la force contre-électromotrice du voltamètre.

B) **La bobine est placée horizontalement de manière que son axe soit perpendiculaire au méridien magnétique. Une petite aiguille aimantée, mobile autour d'un axe vertical, se trouve dans la région centrale de la bobine. Calculer, à quelques minutes près, la déviation de cette aiguille, sachant que la composante horizontale de l'induction magnétique terrestre est** $\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ **tesla.**

On donne : tg $70° = 2{,}747$, tg $71° = 2{,}904$, tg $72° = 3{,}078$.

(Lyon.)

A) 1° Le solénoïde, que nous supposons très long, comporte n_1 spires par mètre de longueur. Lorsque le courant d'intensité I circule dans le fil, il provoque dans la région centrale une induction sensiblement uniforme, perpendiculaire aux spires, dont la valeur en teslas est donnée par l'expression

$$B = 10^{-7} \times 4\pi \times n_1 I. \qquad (1)$$

Par définition, le flux d'induction à travers une surface S m², dont la normale fait un angle α avec le vecteur induction, est donné en webers par l'expression

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Le flux à travers une spire de surface S est donc

$$\Phi = BS \qquad (\alpha = 0),$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\Phi = 10^{-7} \times 4\pi \times n_1 IS.$$

Nous en tirons l'intensité cherchée

$$I = \frac{1}{10^{-7} \times 4\pi} \times \frac{\Phi}{n_1 S}.$$

Application numérique :

$n_1 = 10$ spires par centimètre ou 1 000 spires par mètre,

$\Phi = 14{,}2 \times 10^{-8}$ Wb, $S = 25$ cm², ou 25×10^{-4} m².

$$I = \frac{1}{10^{-7} \times 4\pi} \times \frac{14{,}2 \times 10^{-8}}{1\,000 \times 25 \times 10^{-4}} = \frac{0{,}142}{\pi} \text{ A},$$

$$\mathbf{I = 0{,}045\,2 \text{ A}.}$$

2° La différence de potentiel aux bornes de la bobine est donnée par la loi d'Ohm

$$V_C - V_B = rI.$$

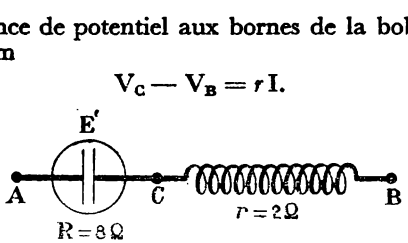


FIG. 1.

Nous connaissons la différence de potentiel $V_A - V_B$ appliquée à l'ensemble du circuit. D'après la propriété fondamentale de la différence de potentiel, nous pouvons écrire (fig. 1)

$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B).$$

Cette relation fournit la d.d.p. aux bornes du voltamètre :

$$V_A - V_C = (V_A - V_B) - (V_C - V_B).$$

Application numérique :

$$r = 2\ \Omega,\ I = 0{,}045\,2\ A,\quad V_A - V_B = 2\ \text{volts}.$$

D.d.p. aux bornes de la bobine :

$$V_C - V_B = 2 \times 0{,}045\,2, \qquad \mathbf{V_C - V_B = 0{,}090\,4\ volt.}$$

D.p.d. aux bornes du voltamètre :

$$V_A - V_C = 2 - 0{,}090\,4, \qquad \mathbf{V_A - V_C = 1{,}91\ volt.}$$

3° La loi d'Ohm, appliquée au voltamètre de force contre-électromotrice E′,

$$\mathbf{V_A - V_C = RI + E'.}$$

donne

$$E' = V_A - V_C - RI.$$

Application numérique :

$$R = 8\ \Omega,\ V_A - V_C = 1{,}91\ \text{volt},\ I = 0{,}045\,2\ A.$$

$$E' = 1{,}91 - 8 \times 0{,}045\,2 = 1{,}91 - 0{,}361\,6.$$

$$\mathbf{E' = 1{,}55\ volt.}$$

B) Lorsque le solénoïde n'est parcouru par aucun courant, l'aiguille n'est soumise qu'à l'induction magnétique terrestre. Comme

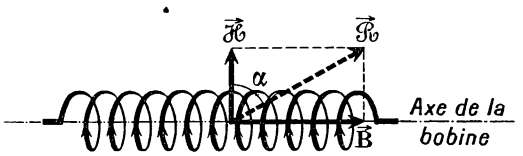


FIG. 2.

elle est mobile autour d'un axe vertical, elle prend la direction de la composante horizontale $\vec{\mathcal{H}}$ de cette induction (fig. 2).

Lorsque le courant passe dans le solénoïde, l'aiguille est soumise à l'induction $\vec{B}$, du solénoïde, perpendiculaire à $\vec{\mathcal{H}}$, donnée par l'expression (1). Elle prend la direction de la résultante $\vec{\mathcal{R}}$ de ces deux inductions et dévie donc d'un angle α tel que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{\mathcal{H}} = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{n_1 I}{\mathcal{H}}.$$

Application numérique :

$$n = 1\,000, \quad I = 0{,}045\,2\ \text{A}, \quad \mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}\ \text{tesla},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{1\,000 \times 0{,}045\,2}{0{,}2 \times 10^{-4}} = 2{,}84 ;$$

α est compris entre 70^0 et 71^0 :

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 70^0 = 0{,}093,$$
$$\operatorname{tg} 71^0 - \operatorname{tg} 70^0 = 0{,}157.$$

La différence entre α et 70^0 est, en minutes sexagésimales,

$$\frac{60 \times 0{,}093}{0{,}157} = 35'.$$

$$\alpha = 70^0\,35'.$$

CHAPITRE XXIII

Action d'une induction magnétique sur un courant.

98. — Action d'une induction magnétique sur un élément de courant mobile : travail électromagnétique pendant le déplacement de cet élément.

Un courant de 10 ampères traverse en série :

1° Un voltamètre à azotate d'argent (électrodes d'argent). Donner la masse d'argent déposé par heure.

2° Un fil rectiligne, supposé indéfini, horizontal et dans le plan du méridien magnétique passant par l'axe vertical d'une petite aiguille aimantée horizontale. Le fil est à 50 centimètres au-dessus de l'aiguille. Donner (par sa tangente) la déviation de l'aiguille. Composante horizontale de l'induction terrestre :

$$\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4} \text{ tesla.}$$

3° Une barre horizontale mobile sur deux rails parallèles distants de 10 centimètres. La barre est placée dans une induction verticale uniforme de 100×10^{-4} tesla, elle est perpendiculaire aux rails et, sous l'action du courant, elle se déplace parallèlement à elle-même de 40 centimètres par seconde. Donner l'expression et la valeur du travail électromagnétique accompli par seconde. Quelle est la puissance en watts d'un moteur qui fournirait un tel travail ?

(Buenos Aires.)

1° La masse d'argent déposé par le courant d'intensité I ampères pendant t secondes est donné par la loi de Faraday :

$$m = \frac{1}{96\,500} \times \frac{A}{n} \times It \quad \text{grammes},$$

$\frac{A}{n}$ étant la valence-gramme de l'argent.

Application numérique :

$$\frac{A}{n} = \frac{107{,}9}{1}, \qquad I = 10 \text{ ampères},$$

$t = 1$ heure ou 3 600 secondes.

$$m = \frac{1}{96\,500} \times \frac{107{,}9}{1} \times 10 \times 3\,600,$$

$$m = \mathbf{4{,}025\ g.}$$

2° Nous supposons que l'aiguille ne peut se mouvoir que dans un plan horizontal (*fig.* 1).

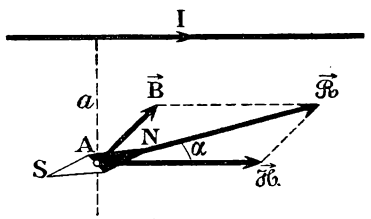


FIG. 1.

Lorsqu'un courant d'intensité I passe dans le fil, l'aiguille est soumise à deux inductions magnétiques :

— la composante horizontale, $\vec{\mathcal{H}}$, de l'induction terrestre,

— l'induction magnétique, $\vec{B}$, créée par le courant.

Celle-ci est définie de la manière suivante, au point A, centre de l'aiguille :

— direction : perpendiculaire au plan formé par le point A et le courant,

— sens : dirigé vers la gauche de l'observateur d'Ampère couché le long du fil et regardant le point A,

— module : donné par la formule

$$B = 10^{-7} \times \frac{2I}{a},$$

a étant la distance de l'aiguille au fil.

L'aiguille s'oriente dans la direction de $\vec{\mathcal{R}}$ résultante de $\vec{\mathcal{H}}$ et $\vec{B}$ et dévie d'un angle α tel que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{\mathcal{H}} = 10^{-7} \times \frac{2I}{a\mathcal{H}}.$$

Application numérique :

$I = 10$ ampères, $a = 50$ cm ou 0,50 m, $\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{10^{-7} \times 2 \times 10}{0{,}50 \times 0{,}2 \times 10^{-4}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = 0{,}2, \quad \alpha = 11°20'.$$

3° La barre horizontale est parcourue sur une longueur CD égale à la distance l des deux rails, par le courant d'intensité I. Placée dans le champ d'induction magnétique $\vec{B}$, perpendiculaire aux rails, elle est soumise à une force électromagnétique $\vec{f}$ que l'on peut supposer appliquée en son milieu M (*fig.* 2).

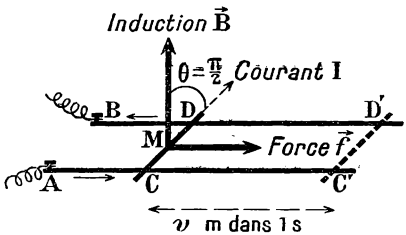


FIG. 2.

Cette force est définie par la loi de Laplace :

— direction : perpendiculaire au plan formé par le champ et le courant ;

— sens : dirigé vers la gauche de l'observateur d'Ampère regardant dans le sens du champ ;

— module : donné, en newtons, par la formule

$$f = IBl \sin\theta,$$

θ étant l'angle formé par la direction positive du champ et la direction positive du courant.

θ est égal à $\frac{\pi}{2}$. La force f est dans ces conditions $f = IBl$.

Sous l'action de cette force, la barre se déplace sur les rails, parallèlement à CD, avec une vitesse v. Le travail électromagnétique accompli dans 1 seconde correspond au déplacement $CC' = v \times 1$:

$$W = f \times CC' = f \times v \times 1 = IBlv \times 1;$$

W est exprimé en joules, si I est exprimé en ampères, B en teslas, l en mètres et v en m/s.

Application numérique :

$$I = 10 \text{ ampères}, \quad B = 100 \times 10^{-4} \text{ tesla}, \quad l = 10 \text{ cm ou } 0{,}10 \text{ m},$$
$$v = 40 \text{ cm/s. ou } 0{,}40 \text{ m/s.}$$
$$W = 10 \times 100 \times 10^{-4} \times 0{,}10 \times 0{,}40 \times 1,$$
$$\mathbf{W = 4 \times 10^{-3} \text{ joule.}}$$

Un moteur qui fournirait un tel travail aurait une puissance P égale à 4×10^{-3} joule par seconde, ou watt.

$$\mathbf{P = 4 \times 10^{-3} \text{ watt.}}$$

99. — Action d'une induction magnétique de direction variable sur un courant rectiligne.

Un fil de cuivre, BC, rectiligne et rigide, de longueur 10 cm et de diamètre 1,5 mm, est suspendu par deux fils conducteurs AB et DC, infiniment flexibles, de longueur 1 m et de poids négligeable. On fait passer un courant dans le sens ABCD. Un aimant en fer à cheval crée entre ses branches une induction uniforme B de 400×10^{-4} tesla, que l'on supposera brusquement limitée à une largeur de 4 cm dans la direction perpendiculaire au plan du fer à cheval.

1° Indiquer clairement, en s'aidant d'un croquis, comment il faut placer l'aimant pour que BC puisse être soulevé par une force électromagnétique verticale. Calculer l'intensité minimale du courant pour que ce soulèvement ait lieu.

2° Indiquer de la même façon comment il faut placer l'aimant pour que CD s'écarte d'un angle α du plan vertical contenant AD sous l'action d'une force électromagnétique perpendiculaire à ce plan. L'intensité du courant étant 0,1 A, calculer le déplacement, d, de BC.

3° Indiquer enfin comment il faut placer l'aimant pour que BC ne subisse aucune action.

4° On donne à l'aimant une position telle que l'induction B reste perpendiculaire à BC mais soit inclinée de l'angle θ sur la verticale. Établir la formule générale donnant $\operatorname{tg} \alpha$ en fonction de θ.

5° On éloigne l'aimant et l'on modifie la suspension de BC en rendant rigides les conducteurs AB et CD. BC étant orienté dans le plan du méridien magnétique, le fil rigide ABCD peut se déplacer autour de l'axe AB. Calculer l'intensité du courant lorsque le déplacement, mesuré à l'aide d'un microscope, est égal à 1 mm.

Données : poids volumique du cuivre : 8,85 gf/cm³ ;

1 gramme-force = $9{,}81 \times 10^{-3}$ newton; composante horizontale de l'induction terrestre : $0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla ; inclinaison magnétique : 64° 45′ (tg 64° 45′ = 2,12).

(Rennes.)

1° La force électromagnétique, que nous supposons appliquée au milieu M de la tige BC, doit être verticale et dirigée de bas en haut. D'après la loi de Laplace cette force est :

— perpendiculaire au plan de l'induction et du courant;

— dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère regardant le sens du champ;

— donnée, en newtons, par l'expression

$$f = \mathrm{I\,B}\,a \sin\beta, \qquad (1)$$

dans laquelle B est le module de l'induction en teslas, a la longueur en mètres de la partie du conducteur BC placée dans le champ, I l'intensité du courant en ampères et β l'angle que fait le courant avec l'induction.

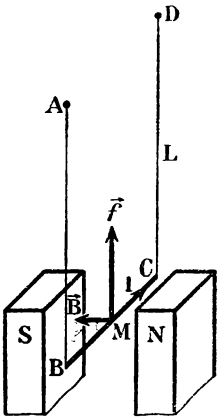


FIG. 1.

Le vecteur induction au point M doit donc être dans le plan horizontal passant par BC. Sa direction dans ce plan n'est pas parfaitement définie : l'angle des vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\vec{B}$ peut en effet être compris entre o et π. L'expression (1) montre toutefois que la force f a sa valeur maximale quand l'angle β a la valeur $\frac{\pi}{2}$ (induction perpendiculaire au courant). Nous placerons donc l'aimant de telle sorte que l'induction ait cette direction et ce sens (*fig.* 1).

La force f est alors donnée par l'expression

$$f = \mathrm{IB}\,a. \qquad (2)$$

Calcul de l'intensité minimale du courant.

La tige BC se soulèvera si $f > p$, p étant le poids de cette tige évaluée en newtons.

La valeur minimale I_m de l'intensité est telle que

$$f = p \quad \text{ou} \quad \mathrm{I}_m\,\mathrm{B}\,a = p.$$

Nous en tirons

$$\mathrm{I}_m = \frac{p}{\mathrm{B}a}.$$

Le poids p de la tige BC de longueur l cm, de diamètre D cm et de poids volumique ϖ gf/cm^3 est

$$p = \pi \frac{\mathrm{D}^2}{4}\, l\, \varpi \text{ gramme-force ou}$$

$$p = \pi \frac{\mathrm{D}^2}{4}\, l\, \varpi \times 9{,}81 \times 10^{-3} \text{ newton.}$$

Application numérique :

$B = 400 \times 10^{-4}$ tesla, $a = 4$ cm ou 0,04 m, $l = 10$ cm, $D = 1{,}5$ mm ou 0,15 cm, poids volumique du cuivre $\varpi = 8{,}85$ gf/cm³.

$$p = \pi \times \frac{0{,}15^2}{4} \times 10 \times 8{,}85 = 1{,}564 \text{ gf ou } 1{,}564 \times 9{,}81 \times 10^{-3} \text{ newton},$$

$$I_m = \frac{1{,}564 \times 9{,}81 \times 10^{-3}}{400 \times 10^{-4} \times 0{,}04} = \frac{1\,534}{160},$$

$$I_m = \mathbf{9{,}59\ A.}$$

2° La loi de Laplace indique de quelle façon il faut placer l'aimant pour que la tige CD s'écarte du plan vertical contenant AD d'un

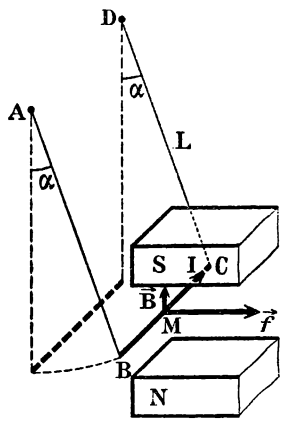


Fig. 2.

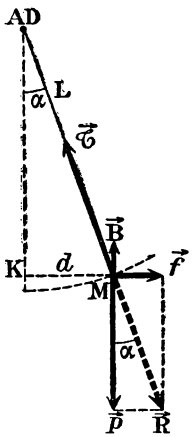


Fig. 3.

angle α sous l'action d'une force électromagnétique perpendiculaire à ce plan (*fig.* 2).

La figure 3 représente la projection de ce dispositif (sauf l'aimant) sur un plan vertical perpendiculaire en M à BC.

Calcul du déplacement.

La tige BC est soumise à trois forces (*fig.* 3) appliquées en son milieu M :

— son poids $\vec{p}$, dirigé suivant la verticale,

— la force électromagnétique $\vec{f}$, perpendiculaire au plan vertical contenant $\vec{B}$ et BC, dont l'intensité est donnée par la formule

$$f = IBa;$$

— la résultante $\vec{\mathcal{T}}$ des tensions des deux brins du fil, dirigée parallèlement à ces brins, dont l'intensité est inconnue.

Lorsque la tige est en équilibre, la somme géométrique de ces trois forces est nulle :

$$\vec{\mathcal{T}} + \vec{p} + \vec{f} = 0.$$

Cette condition est réalisée si la tension $\vec{\mathcal{T}}$ est opposée à la résultante $\vec{R}$ des forces $\vec{f}$ et $\vec{p}$.

D'après la figure 3, nous avons la relation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{p}, \tag{3}$$

qui nous donne la valeur de l'angle α.

Le déplacement d s'obtient en fonction de la longueur L des brins AB et CD et de l'angle α en écrivant (triangle AMK)

$$d = L \sin \alpha. \tag{4}$$

Dans le cas particulier où α est un petit angle, nous pouvons confondre le sinus et la tangente avec l'angle en radians. Les relations (3) et (4) deviennent

$$\alpha = \frac{f}{p} \quad \text{et} \quad d = L\alpha.$$

Nous en tirons

$$d = L\frac{f}{p} = \frac{L\,I\,B}{p}\,a. \tag{5}$$

Application numérique :

L = 1 m, I = 0,1 ampère, $B = 400 \times 10^{-4}$ tesla, $a = 4$ cm ou 0,04 m, $p = 1{,}564$ gramme-force ou $1\,534 \times 10^{-5}$ newton.

$$d = \frac{1 \times 0{,}1 \times 400 \times 10^{-4} \times 0{,}04}{1\,534 \times 10^{-5}} = \frac{16}{1\,534}.$$

$$d = \mathbf{0{,}0104\ m.}$$

3° Pour que la tige BC ne subisse aucune action, il faut placer l'aimant de telle sorte que la force f, donnée par l'expression (1), soit nulle. On peut donner à l'aimant deux positions :

a) position correspondant à $\beta = 0$ (lignes de force parallèles au courant et de même sens) ;

b) position correspondant à $\beta = \pi$ (lignes de force parallèles au courant et de sens opposé).

4° La figure 4 représente en perspective les fils de suspension AB et CD écartés du plan vertical d'un angle α et l'aimant NS, dont l'induction $\vec{B}$ perpendiculaire au fil de cuivre BC fait l'angle θ avec la verticale.

La figure 5 représente ce même dispositif (sauf l'aimant) en projection sur un plan vertical perpendiculaire en M à BC.

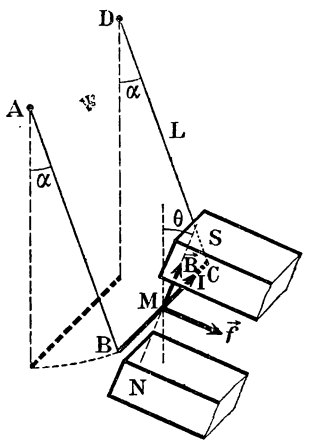


FIG. 4.

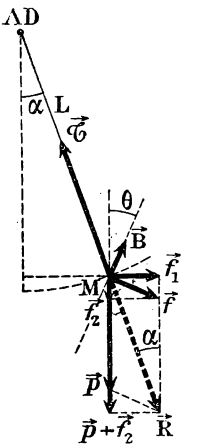


FIG. 5.

La condition d'équilibre s'écrit encore comme au 2°

$$\vec{\mathfrak{C}} + \vec{p} + \vec{f} = 0.$$

Cette condition est réalisée si la tension $\vec{\mathfrak{C}}$ est opposée à la résultante $\vec{R}$ des forces $\vec{f}$ et $\vec{p}$. Mais $\vec{R}$ est aussi la résultante des forces $\vec{f_1}$ et $\vec{p} + \vec{f_2}$, $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ étant les composantes de $\vec{f}$ suivant l'horizontale et la verticale.

D'après la figure 5, nous avons la relation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f_1}{p + f_2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f\cos\theta}{p + f\sin\theta},$$

qui est la relation cherchée entre $\operatorname{tg}\alpha$ et θ.

Explicitons cette relation :

$$f = IB\,a = 0{,}1 \times 400 \times 10^{-4} \times 0{,}04 = 16 \times 10^{-5} \text{ newton},$$
$$p = 1\,534 \times 10^{-5} \text{ newton},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{16\cos\theta}{1\,534 + 16\sin\theta}.$$

Pour $\theta = 0$ nous retrouvons bien la formule (3).

5° L'induction magnétique terrestre B_T, peut être considéré comme la somme géométrique de deux inductions (*fig.* 6) :

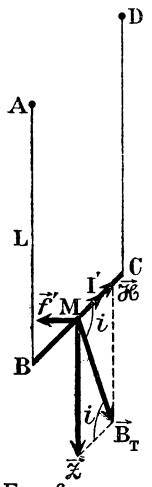


Fig. 6.

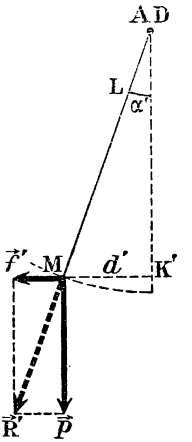


Fig. 7.

— sa composante horizontale $\vec{\mathcal{H}}$ dont la direction est parallèle à BC et qui n'agit pas sur ce conducteur,

— sa composante verticale $\vec{\mathcal{Z}}$ dont le module est

$$\mathcal{Z} = \mathcal{H} \operatorname{tg} i,$$

i étant l'inclinaison magnétique.

Sous l'action de l'induction $\vec{\mathcal{Z}}$, le conducteur BC est soumis à une force $\vec{f}'$ dont la direction et le sens sont donnés par la règle de l'observateur d'Ampère (*fig.* 6) et dont le module est

$$f' = I' \mathcal{Z}\, l \text{ newtons},$$

I' étant l'intensité du courant et l la longueur de l'élément de circuit BC soumise à l'induction terrestre. En raison de la rigidité du

cadre ABCD l'action de l'induction magnétique terrestre sur AB et CD est sans effet.

Le conducteur BC se déplace donc dans le sens indiqué sur la figure. Il est en équilibre lorsqu'il s'écarte du plan vertical d'un angle α' (*fig.* 7, la résultante $\vec{R}$ passant par l'axe AD) tel que

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{f'}{p}.$$

Le déplacement d' est, d'autre part, donné par la relation

$$d' = L \sin \alpha'.$$

L'induction $\mathcal{B}$ étant très faible, nous sommes ici dans le cas des petits angles et nous pouvons écrire

$$d' = L\frac{f'}{p} = \frac{LI'\mathcal{B}l}{p}.$$

Nous en tirons

$$I' = \frac{pd'}{L\mathcal{B}l},$$

ou

$$I' = \frac{pd'}{L\mathcal{H} \times \operatorname{tg} i \times l}.$$

Application numérique : $p = 1{,}534 \times 10^{-5}$ newton,

$d' = 1$ mm ou 0,001 m, $L = 1$ m, $\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla,
$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg}\ 64^\circ 45' = 2{,}12$, $l = 10$ cm ou 0,10 m.

$$I' = \frac{1\,534 \times 10^{-5} \times 0{,}001}{1 \times 0{,}2 \times 10^{-4} \times 2{,}12 \times 0{,}10} = \frac{1534}{424} = 3{,}62 \text{ A.}$$

$$\mathbf{I = 3{,}62\ A.}$$

100. — Action de l'induction magnétique d'un solénoïde sur un circuit fermé.

Un cadre plat carré, mobile autour d'un axe vertical, de 2 cm de côté, porte sur sa tranche 10 spires d'un fil conducteur. Il est placé à l'intérieur d'un solénoïde, d'axe horizontal, de 1 m de longueur et dont le nombre total des spires est égal à 1 000. On envoie dans le solénoïde et dans le conducteur entourant le cadre un même courant (le solénoïde et le fil conducteur sont montés en série).

1° On demande la relation donnant l'intensité de l'induction magnétique en fonction de l'intensité du courant électrique à l'intérieur du solénoïde considéré.

2° Indiquer, lorsque le plan du cadre est parallèle à l'axe du solénoïde :

a) **la relation donnant le moment du couple exercé sur le cadre mobile en fonction de l'intensité du courant électrique circulant dans le solénoïde et le fil conducteur ;**

b) **l'intensité du courant électrique qui traverse le solénoïde et le fil du conducteur entourant le cadre, lorsque le moment du couple exercé sur le cadre est égal à $201{,}06 \times 10^{-7}$ mètre-newton.**

(*Montpellier.*)

1° L'induction magnétique à l'intérieur d'un solénoïde de longueur l m, comportant N spires, et parcouru par un courant d'intensité I ampères est sensiblement uniforme, et donné en teslas par la formule

$$B = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{N}{l} \times I.$$

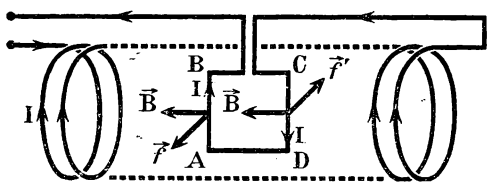
Numériquement :

$$N = 1\,000, \quad l = 1 \text{ m}.$$

$$B = 10^{-7} \times 4\pi \times \frac{1\,000}{1} \times I,$$

$$\mathbf{B = 10^{-4} \times 4\pi\, I \text{ tesla}.} \qquad (1)$$

2° *a*) Représentons schématiquement le solénoïde par ses spires extrêmes et le fil conducteur entourant le cadre par le carré ABCD de côté *a*. Le courant circule, par exemple, dans le sens ABCDA



L'induction magnétique du solénoïde est perpendiculaire au plan des spires. Son sens est donné par la règle de l'observateur d'Ampère.

Les brins tels que BC et AD sont parallèles à l'induction. La force électromagnétique qui s'exerce sur chacun d'eux est nulle.

Chacun des brins parallèles à AB est soumis à une force électromagnétique, $\vec{f}$, que l'on peut supposer appliquée en son milieu et dont la direction, le sens et l'intensité sont donnés par la loi de Laplace :

— direction perpendiculaire au plan du cadre ;

— sens donné, par exemple, par la règle des trois doigts de la main gauche (pouce, sens du champ ; index, sens du courant ; majeur, sens de la force) ;

— module, en newtons,

$$f = IBa \sin \alpha.$$

La force F exercée par le champ sur les n brins parallèles à AB a pour module

$$F = nf = n\,IB\,a\sin\alpha.$$

Chacun des brins parallèles à CD est soumis à une force $\vec{f}'$ ayant même direction et même module que $\vec{f}$ mais de sens contraire. La force F′ exercée sur les n brins parallèles à CD est

$$F' = n\,IBa\sin\alpha.$$

Les forces F et F′ forment un couple qui tend à faire tourner le cadre dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le moment de ce couple a pour expression

$$\mathfrak{M} = F \times a = n\,IBa^2\sin\alpha.$$

Numériquement :

$n = 10$, $B = 10^{-4} \times 4\pi$ I d'après (1), $\sin\alpha = \sin 90^0 = 1$, $a = 2$ cm, ou 0,02 m.

$$\mathfrak{M} = 10\,I \times 10^{-4} \times 4\pi I \times 0{,}02^2 \times 1,$$

$$\mathfrak{M} = \mathbf{10^{-7} \times 16\ \pi\, I^2\ mètre\text{-}newton.}$$

Remarquons que ce moment est proportionnel au carré de l'intensité du courant : le sens de rotation du cadre est indépendant du sens du courant.

b) De l'expression précédente, nous tirons la valeur de l'intensité I du courant correspondant à une valeur donnée du moment :

$$I^2 = \frac{\mathfrak{M}}{10^{-7} \times 16\pi}, \qquad I = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{10^{-7} \times \pi}}.$$

Numériquement : $\mathfrak{M} = 10^{-7} \times 201{,}06$ newton-mètre,

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{10^{-7} \times 201{,}06}{10^{-7} \times 3{,}141\,6}} \approx \frac{1}{4}\sqrt{64}.$$

$$\mathbf{I = 2\ ampères.}$$

Remarque. Si le cadre est mobile il tourne de manière à embrasser le flux maximal.

S'il n'y a pas de couple de rappel la position d'équilibre est telle que le plan du cadre soit perpendiculaire à l'axe du solénoïde.

S'il y a un couple de rappel, la rotation du cadre est proportionnelle au carré de l'intensité pour des rotations faibles.

101. — Comparaison de la sensibilité d'un galvanomètre à champ uniforme et d'un galvanomètre à champ radial.

Le cadre mobile d'un galvanomètre a 1 cm de largeur et 2 cm de hauteur et comporte 20 spires. Il est suspendu par un fil de torsion tel qu'un couple de $0{,}1 \times 10^{-7}$ mètre-newton produise un angle de torsion de 1 radian. Ce cadre est placé dans un champ magnétique uniforme dont l'induction est parallèle au plan du cadre, normale à la hauteur du cadre et dont l'intensité est égale à 100×10^{-4} tesla.

1° On demande quelle est l'intensité du courant qui produirait une torsion du fil de 0,02 radian.

2° Écrire la relation entre l'angle de torsion α du fil et l'intensité i du courant qui circule dans le cadre.

Tracer, au moyen de quelques points

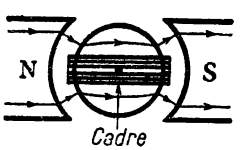
$$\left(\alpha = 0, \qquad \alpha = \frac{\pi}{6} = 0{,}524 \text{ rd}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4} = 0{,}785 \text{ rd},\right.$$
$$\left.\alpha = \frac{\pi}{3} = 1{,}047 \text{ rd}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} = 1{,}571 \text{ rd}\right)$$

la courbe donnant α en fonction de i.

Quelle est la sensibilité du galvanomètre ?

Comment varie-t-elle en fonction de α ?

3° Le cadre est maintenant placé dans un champ magnétique radial tel que les lignes d'induction passent par l'axe de rotation du cadre (voir fig.). L'intensité de l'induction est égale à $1\,000 \times 10^{-4}$ tesla.



Reprendre, dans ces conditions, la question 1°. Quelle est la sensibilité du galvanomètre et comment varie-t-elle en fonction de α ?

(Strasbourg.)

1° Désignons par a et b la largeur du cadre et sa hauteur, par n le nombre de spires et par $\vec{B}$ l'induction magnétique uniforme créée par l'aimant.

Lorsqu'aucun courant ne traverse le fil, le cadre est parallèle à l'induction $\vec{B}$.

Lorsqu'un courant d'intensité i circule dans le fil, le cadre est soumis à un couple électromagnétique qui tend à le placer perpendiculaire à l'induction $\vec{B}$ (voir remarque du problème précédent).

Le fil de suspension exerce un couple de torsion antagoniste. Le cadre prend une position d'équilibre telle que les moments $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ de ces deux couples pris en valeur absolue soient égaux. Il fait alors un angle α avec l'induction $\vec{B}$.

Moment du couple électromagnétique.

Représentons le sens du courant dans une spire ABCD. Les quatre côtés de la spire sont soumis à des forces électromagnétiques dont la direction, le sens et l'intensité sont donnés par la loi de Laplace et que nous pouvons supposer appliquées en leur milieu.

Les côtés BC et AD sont soumis à des forces opposées, $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$, sans action sur le déplacement du cadre (*fig.* 1).

Le côté AB est soumis à une force $\vec{f}$, perpendiculaire au plan IMB et dirigée d'avant en arrière; son intensité est

$$f = iBb \sin \frac{\pi}{2} = iBb$$

(le champ et le courant sont perpendiculaires).

Le côté CD est soumis à une force $\vec{f'}$, de même direction et de même intensité que la précédente, mais dirigée en sens contraire.

Les forces $\vec{f}$ et $\vec{f'}$ forment un couple de moment

$$m = iB\,b \times a \cos \alpha = iBS \cos \alpha,$$

$a \cos \alpha$ étant la distance des deux forces $\vec{f}$ et $\vec{f'}$ et S la surface ab du cadre.

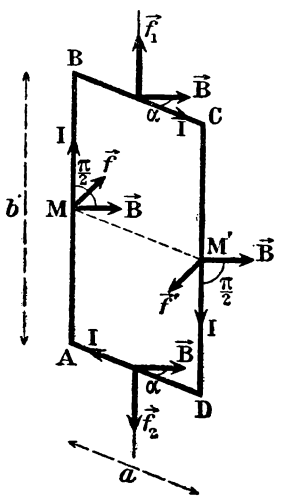


FIG. 1.

Les forces électromagnétiques $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ qui s'exercent sur l'ensemble des n brins sont égales à nf et nf'. Elles forment un couple (*fig.* 2) qui a pour moment

$$\mathfrak{M} = n.m = niBS \cos \alpha.$$

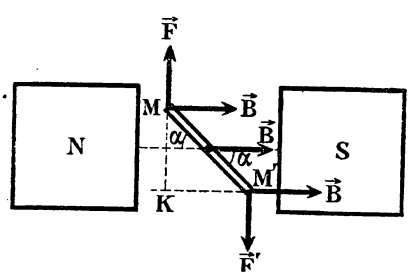


FIG. 2.

Moment du couple de torsion.

Le moment du couple de torsion du fil est proportionnel à l'angle de rotation α exprimé en radians :

$$\mathcal{M}' = C\alpha.$$

Lorsque ce couple a pour moment $\mathcal{M}'_0 = 0{,}1 \times 10^{-7}$ mètre-newton, l'angle de rotation du cadre a la valeur $\alpha_0 = 1$ radian.

Nous pouvons donc calculer la valeur de la constante C (moment du couple de torsion par unité d'angle) :

$$C = \frac{\mathcal{M}'_0}{\alpha_0}.$$

Équation d'équilibre. — Les deux couples, électromagnétique et de torsion, s'exerçant en sens contraire, leurs moments $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, pris en valeur absolue, sont égaux si le cadre est en équilibre :

$$niBS \cos\alpha = C\alpha.$$

Entre l'intensité du courant et l'angle de rotation du cadre nous avons la relation

$$i = \frac{C}{nBS} \times \frac{\alpha}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

ou, en posant $K = \dfrac{C}{nBS}$,

$$i = K\frac{\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (2)$$

Application numérique :

$C = \dfrac{\mathcal{M}'_0}{\alpha_0} = \dfrac{0{,}1 \times 10^{-7}}{1} = 0{,}1 \times 10^{-7}$ mètre-newton par radian, $n = 20$, $B = 100 \times 10^{-4}$ tesla, $S = ab = 1 \times 2 = 2$ cm^2 ou 2×10^{-4} m^2, $\alpha = 0{,}02$ radian, $\cos\alpha = \cos 0{,}02 \approx 1$.

$$K = \frac{C}{nBS} = \frac{0{,}1 \times 10^{-7}}{20 \times 100 \times 10^{-4} \times 2 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4000},$$

$$i = \frac{1}{4000} \times \frac{0{,}02}{1} = 5 \times 10^{-6} \text{ A},$$

$$i = 5\ \mu\text{A}.$$

2° Entre l'intensité du courant et l'angle de rotation du cadre nous avons la relation (1) ou la relation équivalente (2). Dans cette dernière relation explicitons K. Nous avons

$$i = \frac{1}{4000} \times \frac{\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

Le tableau ci-après donne les valeurs de i correspondant aux valeurs données de α.

α radians	$\cos\alpha$	$i = \frac{1}{4000} \times \frac{\alpha}{\cos\alpha}$.
0	1	0
$\frac{\pi}{6} = 0{,}524$	0,866	$0{,}151 \times 10^{-3}$
$\frac{\pi}{4} = 0{,}785$	0,707	$0{,}278 \times 10^{-3}$
$\frac{\pi}{3} = 1{,}047$	0,500	$0{,}523 \times 10^{-3}$
$\frac{\pi}{2} = 1{,}571$	0	∞

La courbe représentative $\alpha = f(i)$ est sensiblement une droite (fig. 3) lorsque α est un petit angle : l'angle de rotation est proportionnel à l'intensité du courant. Elle tend asymptotiquement vers la droite $\alpha = \frac{\pi}{2}$ lorsque i croît indéfiniment.

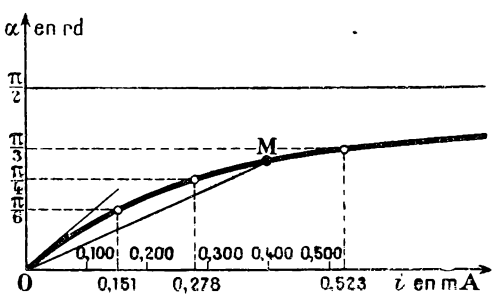


FIG. 3.

La sensibilité du galvanomètre est le rapport de la déviation à l'intensité :

$$s = \frac{\alpha}{i} = \frac{nBS}{C} \cos\alpha = \frac{1}{K} \cos\alpha.$$

Numériquement :

$$s = 4\,000 \cos\alpha \text{ radians par ampère.}$$

La sensibilité, qui est proportionnelle au cosinus de l'angle α, tend vers zéro lorsque l'angle α tend vers $\frac{\pi}{2}$. C'est ce que montre la figure 3 sur laquelle la droite OM a pour pente $s = \frac{\alpha}{i}$.

Pour de petits angles, $\cos\alpha \approx 1$, la sensibilité a la valeur constante

$$s_0 = 4000 \text{ rd/A.}$$

3° Le champ radial est réalisé en plaçant un cylindre de fer doux entre les deux pièces polaires cylindriques de l'aimant (fig. 4).

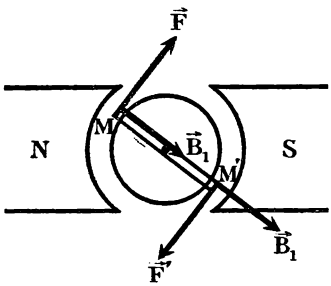


FIG. 4.

L'induction $\vec{B}_1$ dans l'entrefer est dirigée suivant un rayon du cylindre pour toutes les positions du cadre. Elle a par ailleurs une intensité plus élevée que pour le champ uniforme du galvanomètre précédent ($B_1 > B$).

Dans ce cas, chacune des forces $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ reste perpendiculaire au cadre pendant sa rotation.

Le moment du couple électromagnétique est donné par l'expression

$$\mathfrak{M}_1 = F \times MM' = n i B_1 b a \text{ ou } \mathfrak{M}_1 = n i B_1 S$$

et l'équation d'équilibre du cadre est $n i B_1 S = C\alpha$.

La relation entre l'intensité du courant et l'angle de rotation du cadre devient

$$i = \frac{C}{n B_1 S} \times \alpha,$$

ou $i = K_1 \alpha$, en posant $K_1 = \frac{C}{n B_1 S}$.

L'angle de rotation est rigoureusement proportionnel à l'intensité du courant quel que soit cet angle de rotation.

La sensibilité du galvanomètre à champ radial est donnée par l'expression

$$s_1 = \frac{\alpha}{i} = \frac{n B_1 S}{C}.$$

Nous remarquons qu'elle est indépendante de l'angle α.

Elle est de plus supérieure à celle du galvanomètre à champ uniforme. Pour de petits angles de rotation cette dernière est

$$s_0 = \frac{NBS}{C},$$

d'où

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{B_1}{B},$$

$$s_1 = \frac{B_1}{B} s_0.$$

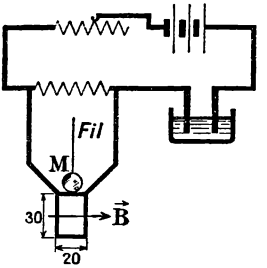
Numériquement : $B_1 = 1\,000 \times 10^{-4}$ tesla, $B = 100 \times 10^{-4}$, $s_0 = 4\,000$,

$$s_1 = \frac{1\,000 \times 10^{-4}}{100 \times 10^{-4}} \times 4\,000,$$

$$s_1 = \mathbf{40\,000\ rd/A.}$$

102. — Étude d'un galvanomètre à cadre mobile.

Un galvanomètre à cadre mobile est constitué essentiellement par un cadre rectangulaire de 20 mm sur 30 mm sur lequel sont enroulés 500 tours de fil rond de cuivre de 0,1 mm de diamètre et qui porte un miroir sphérique de petites dimensions, qui fait l'image d'un filament lumineux sur une règle graduée placée à 1 m. Ce cadre est suspendu par un fil fin d'argent dont les dimensions sont telles qu'une force horizontale de $2{,}5 \times 10^{-5}$ newton appliquée perpendiculairement au cadre à une distance de 1 cm de l'axe de rotation est équilibrée par la torsion du fil quand le cadre a tourné 0,1 radian.



Le galvanomètre est shunté par une résistance de 0,01 ohm. Il est mis sur un circuit comprenant une cuve électrolytique contenant une solution de sulfate de cuivre, une force électromotrice et une résistance additionnelle réglable. Le déplacement de l'image du filament sur la règle graduée est alors 120 mm.

Dans ces conditions il se dépose au bout de 3 heures sur l'une des électrodes de la cuve une masse de 0,382 g de cuivre.

On demande :

1° l'intensité I du courant qui passe dans la cuve électrolytique;

2° la résistance du cadre du galvanomètre ;

3° le courant *i* qui passe dans le cadre du galvanomètre ;

4° l'induction magnétique B à laquelle est soumis le cadre mobile.

On donne : résistivité du cuivre, $1{,}7 \times 10^{-6}$ Ωcm; masse atomique du cuivre : Cu = 63,6 ; celle de l'argent : Ag = 108.

On rappelle que le passage de 1 coulomb dans une cuve électrolytique à azotate d'argent provoque un dépôt de 1,118 mg d'argent.

(Strasbourg.)

1° D'après la loi de Faraday, la masse m de cuivre, de masse atomique A et de valence n, déposée à la cathode du voltamètre à sulfate de cuivre par le passage du courant d'intensité I pendant le temps t est proportionnelle à la valence-gramme $\frac{A}{n}$ du métal et à la quantité It d'électricité qui a traversé l'électrolyte :

$$m = K \times \frac{A}{n} \times It,$$

K étant une constante.

D'autre part, la masse m' d'argent de masse atomique A' et de valence n' déposé à la cathode d'un voltamètre à nitrate d'argent par le passage d'un coulomb est

$$m' = K \times \frac{A'}{n'} \times 1.$$

Des deux relations précédentes, nous tirons

$$\frac{m}{m'} = \frac{\frac{A}{n}}{\frac{A'}{n'}} \times It,$$

d'où

$$I = \frac{m}{m'} \times \frac{\frac{A'}{n'}}{\frac{A}{n}} \times \frac{1}{t}.$$

Numériquement : $A = 63{,}6$, $n = 2$, $A' = 108$, $n = 1$,

$t = 3$ heures ou $3 \times 3600 = 10800$ secondes,

$m = 0{,}382$ g ou 382 mg, $m' = 1{,}118$ mg.

$$I = \frac{382}{1{,}118} \times \frac{\frac{108}{1}}{\frac{63{,}6}{2}} \times \frac{1}{10800} = \frac{382}{1{,}118 \times 31{,}8 \times 100} = 0{,}1074,$$

I = 0,107 ampère.

2° Le cadre de hauteur a et de largeur b porte n tours de fil de cuivre de diamètre d.

La longueur du fil est donc

$$l = 2(a + b)n,$$

sa section est

$$s = \frac{\pi d^2}{4},$$

et sa résistance,

$$r = \rho \frac{l}{s},$$

ρ étant la résistivité du cuivre.

Numériquement :

$a = 20$ mm ou 2 cm, $b = 30$ mm ou 3 cm, $n = 500$,

$d = 0{,}1$ mm ou 0,01 cm, $\rho = 1{,}7 \times 10^{-6}\ \Omega$ cm.

$$l = 2\,(2 + 3) \times 500 = 5\,000 \text{ cm},$$

$$s = \frac{\pi \times 0{,}01^2}{4} = \frac{\pi}{4 \times 10^4} \text{ cm}^2, \quad r = 1{,}7 \times 10^{-6} \times \frac{5\,000 \times 4 \times 10^4}{\pi} = \frac{340}{\pi},$$

$$r = \mathbf{108{,}2\ ohms.}$$

Remarque.—Nous avons supposé, dans le calcul précédent, que, comme dans tous les galvanomètres modernes, le courant arrivant par le fil de torsion et sortant par un spiral entourant le fil de torsion, les côtés AD et BC contenaient le même nombre de fils. Dans les galvanomètres anciens, le courant arrivant par le fil de torsion disposé à la partie supérieure du cadre et sortant par le fil de torsion disposé à sa partie inférieure, si le côté DC contient n fils, le côté AB en contient obligatoirement $n + 1$. Dans ce cas, la longueur du fil est $l + (a + b)$. En négligeant le terme $(a + b)$, nous commettons sur la longueur, et par suite sur la résistance r, une erreur relative

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{a + b}{2(a + b)n} = \frac{1}{2n} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{2 \times 500} = \frac{1}{1\,000},$$

erreur qui peut être négligée.

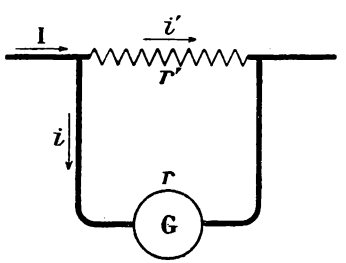


FIG. 1.

3° Soit i' l'intensité du courant qui passe dans le shunt de résistance r' (fig. 1).

La loi des intensités et la loi des tensions des courants dérivés donnent les deux relations

$$I = i + i'$$

et

$$ri = r'i'.$$

Nous en tirons

$$\frac{i}{i'} = \frac{r'}{r},$$

$$\frac{i}{i'+i} = \frac{r'}{r+r'}, \qquad \frac{i}{I} = \frac{r'}{r+r'},$$

$$i = I\frac{r'}{r+r'}.$$

Numériquement :

$$I = 0{,}1074 \text{ A}, \quad r' = 0{,}01\ \Omega, \quad r = 108{,}2\ \Omega,$$

$$i = 0{,}1074 \times \frac{0{,}01}{108{,}2 + 0{,}01} = 0{,}992 \times 10^{-5}.$$

$$i \approx \mathbf{10^{-5}\ ampère.}$$

4° Représentons schématiquement le cadre, supposé en équilibre, par le rectangle ABCD de hauteur a et de largeur b dont le plan fait avec l'induction $\vec{B}$, l'ange α (fig. 2).

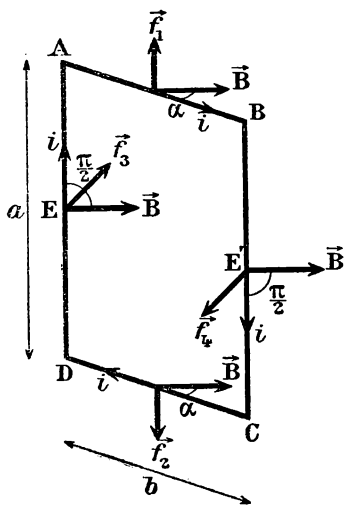


FIG. 2.

Supposons, comme précédemment, que les quatre côtés du cadre contiennent le même nombre de fils.

Le cadre est soumis à l'action de deux couples antagonistes : le couple électromagnétique et le couple de torsion.

a) Le couple électromagnétique a pour moment $\mathfrak{M}$.

Pour calculer $\mathfrak{M}$, évaluons les forces électromagnétiques qui s'exercent sur les quatre côtés.

D'après la règle d'Ampère, les côtés AB et CD sont soumis à des forces électromagnétiques $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ égales et de sens contraire, dirigées suivant l'axe de rotation. Leur moment par rapport à cet axe est nul.

Les côtés AD et BC sont soumis à des forces $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_4$, appliquées en leur milieu E et E'. Leur valeur commune est, d'après la loi de Laplace,

$$f_3 = f_4 = n\,iBa\sin\frac{\pi}{2} = n\,iBa.$$

L'ensemble des forces $\vec{f_3}$ et $\vec{f_4}$ forme un couple de moment

$$\mathfrak{M} = f_3 \times \mathrm{EK} = n i \mathrm{B} a \times b \cos \alpha = n i \mathrm{BS} \cos \alpha,$$

S désignant l'aire du cadre (fig. 3).

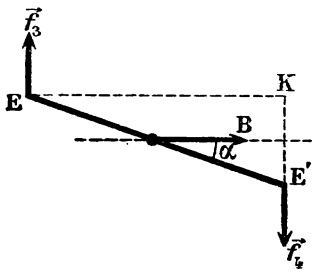


FIG. 3.

b) Le couple de torsion du fil a pour moment $\mathfrak{M}'$.
$\mathfrak{M}'$ est proportionnel à l'angle d'écart :

$$\mathfrak{M}' = \mathrm{C}\alpha,$$

C étant la constante de torsion du fil.

Le cadre étant en équilibre, les moments des deux couples antagonistes sont égaux :

$$n\, i\, \mathrm{BS} \cos \alpha = \mathrm{C}\alpha.$$

Nous en tirons la valeur de l'induction B :

$$\mathrm{B} = \frac{\mathrm{C}}{n i \mathrm{S}} \times \frac{\alpha}{\cos \alpha}.$$

Calcul de la constante C.

Une force horizontale F appliquée perpendiculairement au cadre, à une distance D de l'axe de rotation, est équilibrée par la torsion du fil quand le cadre a tourné de l'angle donné α'. Cette force a le même effet qu'un couple de moment $\mathrm{F} \times \mathrm{D}$ et nous pouvons écrire

$$\mathrm{F} \times \mathrm{D} = \mathrm{C}\alpha'.$$

Nous en tirons

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{F} \times \mathrm{D}}{\alpha'}.$$

Calcul de l'angle α.

Lorsque le miroir M a tourné de l'angle α, l'image O du filament est venue au point O' tel que $\widehat{\mathrm{OMO}'} = 2\alpha$ (fig. 4).

Le triangle MOO′ donne

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{OO'}{MO},$$

relation qui permet de calculer α.

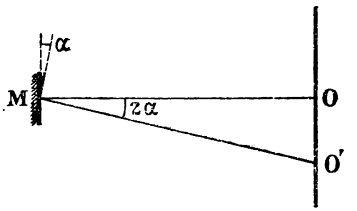


FIG. 4.

Application numérique :

Calcul de C.

$F = 2{,}5 \times 10^{-5}$ newton, $D = 1$ cm ou 0,01 m, $\alpha' = 0{,}1$ radian.

$$C = \frac{2{,}5 \times 10^{-5} \times 0{,}01}{0{,}1},$$

$$C = 25 \times 10^{-7} \text{ mètre-newton par radian.}$$

Calcul de α.

$OO' = 120$ mm, $MO = 1$ m ou 1 000 mm.

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{120}{1\,000} = 0{,}12.$$

L'angle α est un petit angle et nous pouvons écrire

$$2\alpha = 0{,}12,$$

$$\alpha = 0{,}06 \text{ radian.}$$

Calcul de B.

$i = 10^{-5}$A, $n = 500$, $S = 3 \times 2 = 6$ cm² ou 6×10^{-4} m², $C = 25 \times 10^{-7}$, $\alpha = 0{,}06$ rd, $\cos \alpha = 1$,

$$B = \frac{25 \times 10^{-7}}{500 \times 10^{-5} \times 6 \times 10^{-4}} \times \frac{0{,}06}{1},$$

$$B = \mathbf{500 \times 10^{-4} \text{ tesla.}}$$

103. — Milliampèremètre à cadre mobile : transformation en voltmètre et en ampèremètre.

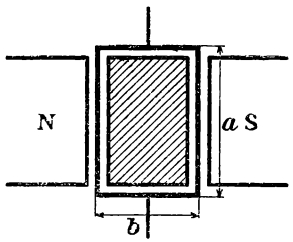
1° On dispose d'un milliampèremètre à cadre mobile gradué de 0 à 50 milliampères. Sa résistance intérieure est 1 ohm. Quelles sont les valeurs des résistances et comment faut-il les brancher pour transformer cet appareil :

a) en un voltmètre destiné à la mesure des différences de potentiel allant de 0 à 2,5 volts ;

b) en un ampèremètre destiné à la mesure d'intensités allant de 0 à 2,5 ampères ?

2° On veut construire ce milliampèremètre en suspendant le cadre mobile à un fil de torsion vertical. Le cadre porte $n = 200$ spires ; la spire moyenne a la forme d'un rectangle ($a = 3$ cm ; $b = 2$ cm).

Les grands côtés du cadre peuvent tourner autour de l'axe formé par le fil de torsion dans un entrefer de révolution constitué par un cylindre de fer doux entouré par les pièces polaires N et S d'un aimant. On admettra que dans la zone où peuvent se déplacer les côtés verticaux, ceux-ci sont soumis sur toute leur longueur à une induction $B = 0{,}1$ tesla horizontale dirigé vers l'axe de rotation du cadre.



a) On sait que le cadre dévie de 60° pour un courant de 50 milliampères. Quelle doit être la valeur de la constante K du couple de torsion du fil de suspension (K, couple de torsion pour une rotation de 1°) ?

b) Quelle doit être la section en mm² du fil de cuivre constituant le cadre pour que sa résistance soit 1 ohm ? Résistivité du cuivre : $\rho = 1{,}6$ $\mu\Omega$cm.

(Lyon.)

1° *a*) Pour transformer le milliampèremètre, de résistance r, en un voltmètre, il faut mettre une résistance supplémentaire R en série avec l'appareil (fig. 1).

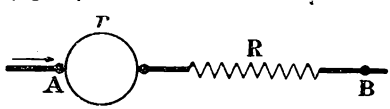


FIG. 1.

L'intensité du courant qui traverse l'ensemble doit varier de 0 à i_m ampères lorsque la différence de potentiel à ses extrémités varie de 0 à V_m volts. D'après la loi d'Ohm la résistance R doit être telle que

$$V_m = (R + r) i_m.$$

Nous tirons de cette relation

$$R = \frac{V_m}{i_m} - r.$$

Numériquement : $V_m = 2{,}5$ volts, $i_m = 50$ m A ou 0,050 A, $r = 1\ \Omega$.

$$R = \frac{2{,}5}{0{,}050} - 1.$$

$$R = 49\ \Omega.$$

b) Pour transformer le milliampèremètre en ampèremètre, c'est-à-dire pour changer sa sensibilité, il faut mettre une résistance R′ en dérivation aux bornes de l'appareil. Cette dérivation est un shunt (fig. 2).

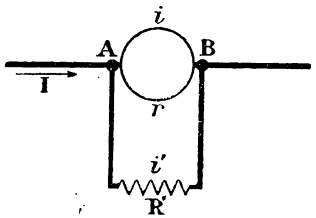


FIG. 2.

L'intensité du courant dans le circuit principal doit être égale à I_m ampères, lorsque l'appareil est parcouru par un courant d'intensité i_m ampères. L'intensité i'_m qui passe dans le shunt est donnée par l'équation (loi des intensités)

$$I_m = i_m + i'_m.$$

D'où nous tirons

$$i'_m = I_m - i_m.$$

La différence de potentiel $V_A - V_B$ est indépendante de la dérivation considérée (loi des tensions) :

$$V_A - V_B = r\,i_m = R'\,i'_m.$$

En tenant compte de la relation précédente nous avons

$$r\,i_m = R'\,(I_m - i_m).$$

La résistance R′ du shunt a pour expression

$$R' = \frac{r\,i_m}{I_m - i_m}.$$

Numériquement : $r = 1\ \Omega$, $i_m = 50$ mA ou 0,050 A, $I_m = 2{,}5$ A.

$$R' = \frac{1 \times 0{,}050}{2{,}5 - 0{,}050} = \frac{1}{49}\ \Omega.$$

$$\mathbf{R' = 0{,}020\,4\ \Omega.}$$

2° *a*) Le cadre du milliampèremètre est placé dans un champ radial (fig. 3). Lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité *i*, les côtés du cadre parallèles au champ ne sont soumis à aucune force électromagnétique tandis que les côtés perpendiculaires au champ sont soumis chacun à une force électromagnétique

$$f = n \times i\,B\,a \sin\frac{\pi}{2} = n\,i\,B\,a \text{ newton.}$$

(Nous supposons que les deux côtés comportent le même nombre de fils.)

L'ensemble de ces forces forme un couple de moment

$$\mathfrak{M} = f \times b = n\,i\,B\,a\,b \text{ mètre-newton.}$$

Le cadre soumis au couple électromagnétique de moment $\mathfrak{M}$, subit une rotation d'un angle α degrés autour de l'axe constitué par

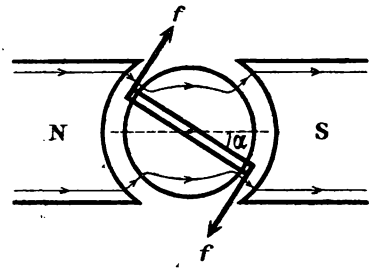


FIG. 3.

le fil de suspension. Ce moment $\mathfrak{M}$ ne change pas pendant cette rotation mais la torsion du fil crée un couple antagoniste $\mathfrak{M}'$ proportionnel à l'angle α :

$$\mathfrak{M}' = K\alpha.$$

Le cadre est en équilibre lorsque $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$, ou

$$n i B a b = K\alpha.$$

Cette relation donne la constante K cherchée :

$$K = \frac{n i B a b}{\alpha}.$$

Application numérique :

$n = 200$, $i = 50$ mA ou 0,050 A pour $\alpha = 60°$, $B = 0{,}1$ tesla, $a = 3$ cm, ou 0,03 m, $b = 2$ cm, ou 0,02 m,

$$K = \frac{200 \times 0{,}050 \times 0{,}1 \times 0{,}03 \times 0{,}02}{60},$$

$$K = 100 \times 10^{-7} \text{ mètre-newton par degré.}$$

b) La section s du fil est donnée par la relation

$$r = \rho \frac{l}{s},$$

dans laquelle r représente la résistance du cadre, l la longueur du fil et ρ la résistivité du cuivre.

Nous en tirons $$s = \rho \frac{l}{r}.$$

Mais

$$l = n \times 2\,(a + b),$$

d'où

$$s = \rho \frac{2\,n\,(a + b)}{r}.$$

Numériquement :

$\rho = 1{,}6\ \mu\Omega\ \text{cm}$ ou $1{,}6 \times 10^{-6}\,\Omega\,\text{cm}$, $n = 200$, $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $r = 1\,\Omega$.

$$s = 1{,}6 \times 10^{-6} \times \frac{2 \times 200\,(3 + 2)}{1} = 32 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2.$$

$$s = \mathbf{0{,}32\ mm^2}.$$

CHAPITRE XXIV

Induction électromagnétique.

104. — Induction électromagnétique dans la bobine d'un électro-aimant.

La bobine d'un électro-aimant a 20 cm de longueur; elle contient 120 spires enroulées sur un noyau de 5 cm de diamètre. Le courant d'excitation est 16 ampères.

1° Calculer le flux d'induction à travers le noyau dans les trois hypothèses suivantes :

a) **noyau vide;**

b) **noyau en fonte de perméabilité relative $\mu_1 = 65$;**

c) **noyau en fer doux de perméabilité relative $\mu_2 = 220$.**

2° On enroule sur le noyau 20 spires d'un fil métallique de résistivité 50×10^{-8} Ωm ayant 0,5 mm de diamètre; on ramène le courant de 16 ampères à 0 en 20 secondes. Calculer, dans les trois hypothèses précédentes, la force électromotrice moyenne induite dans le fil.

3° On règle la décroissance du courant excitateur de 16 ampères à 0 en $\frac{1}{20}$ seconde de façon que la courbe représentant la variation du flux soit une ligne droite. Calculer, dans les trois hypothèses précédentes, la quantité de chaleur dégagée dans le fil par le courant induit.

(Montpellier.)

1° a) *Le noyau est vide.*

La bobine de l'électro-aimant, de longueur L mètres contient N spires enroulées sur le noyau de diamètre *d* mètres. Elle comporte donc $n = \frac{N}{L}$ spires par mètre.

Lorsque le courant d'excitation, d'intensité I ampères, circule dans le fil, il provoque à l'intérieur du noyau une induction magnétique $\vec{B}_0$ ainsi définie (fig. 1) :

— direction : perpendiculaire au plan des spires;

— sens : gauche de l'observateur d'Ampère regardant à l'intérieur du noyau;

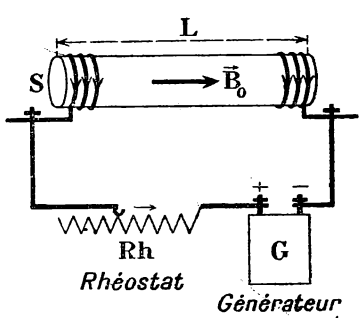


FIG. 1.

— module : donné par l'expression

$$B_0 = 10^{-7} \times 4\pi n \times I \text{ Wb/m}^2 \text{ ou teslas.}$$

Si nous désignons par S la surface des spires, le flux d'induction à travers le noyau est

$$\Phi_0 = B_0 \times S = 10^{-7} \times 4\pi n \times I \times S \text{ webers.}$$

En remplaçant n et S par leurs valeurs en fonction des données, l'expression de Φ_0 devient

$$\Phi_0 = 10^{-7} \times 4\pi \frac{N}{L} \times I \times \frac{\pi d^2}{4},$$

ou, en remarquant que $\pi^2 \approx 10$,

$$\Phi_0 = 10^{-6} \times \frac{N}{L} \times I \times d^2 \textbf{ weber.}$$

Application numérique :

$L = 20$ cm, ou 0,20 m, $N = 120$, $I = 16$ A,
$d = 5$ cm, ou 0,05 m,

$$\Phi_0 = 10^{-6} \times \frac{120}{0{,}20} \times 16 \times 0{,}05^2,$$

$$\Phi_0 = \mathbf{24 \times 10^{-6}} \text{ weber.}$$

b) *Le noyau est en fonte* (perméabilité μ_1).
L'induction magnétique prend la valeur

$$B_1 = B_0 \times \mu_1$$

et le flux devient

$$\Phi_1 = B_0 \times \mu_1 \times S = \Phi_0 \times \mu_1.$$

Numériquement :

$$\mu_1 = 65, \quad \Phi_0 = 24 \times 10^{-6} \textbf{ Wb.}$$
$$\Phi_1 = 24 \times 10^{-6} \times 65,$$
$$\Phi_1 = \mathbf{1\,560 \times 10^{-6}} \text{ Wb.}$$

c) *Le noyau est en fer doux* (perméabilité μ_2).
Le flux prend la valeur

$$\Phi_2 = \Phi_0 \times \mu_2.$$

Numériquement :

$$\mu_2 = 220, \quad \Phi_0 = 24 \times 10^{-6} \text{ Wb.}$$
$$\Phi_2 = 24 \times 10^{-6} \times 220,$$
$$\Phi_2 = \mathbf{5\,280 \times 10^{-6}} \textbf{ Wb.}$$

2° a) *Le noyau est vide.*

Nous supposons que les $N' = 20$ spires de fil forment une deuxième bobine de même section que la première. Le flux d'induction Φ'_0 à travers les N' spires est donné par la relation

$$\Phi'_0 = B_0 \times N' \times S,$$

d'où nous tirons

$$\Phi'_0 = \Phi_0 \times N'.$$

Lorsque l'intensité du courant passe de 16 à 0 ampères en un temps θ, la bobine est le siège d'une f. é. m. d'induction moyenne, égale au signe près, à

$$E_0 = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi'_0}{\theta} = \Phi_0 \times \frac{N'}{\theta} \text{ volts.}$$

Application numérique :

$$\theta = 20 \text{ s}, \quad N' = 20, \quad \Phi_0 = 24 \times 10^{-6} \text{ Wb.}$$

$$E_0 = 24 \times 10^{-6} \times \frac{20}{20} = 24 \times 10^{-6} \text{ volts,}$$

$$E_0 = \mathbf{24 \text{ microvolts.}}$$

b) *Le noyau est en fonte* (perméabilité μ_1).

Le flux d'induction est

$$\Phi'_1 = B_1 \times N' \times S = \Phi_1 \times N' = \Phi'_0 \times \mu_1.$$

La f.é.m. d'induction moyenne E_1 est donnée par le relation

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\Phi'_1}{\Phi'_0} = \frac{\mu_1}{1} = \mu_1,$$

d'où nous tirons

$$E_1 = E_0 \times \mu_1.$$

Numériquement :

$$E_0 = 24 \times 10^{-6} \text{ volt}, \quad \mu_1 = 65,$$

$$E_1 = 24 \times 10^{-6} \times 65 \text{ volt,}$$

$$E_1 = \mathbf{1\,560 \text{ microvolts.}}$$

c) *Le noyau est en fer* (perméabilité μ_2)

La f.é.m. d'induction moyenne devient

$$E_2 = E_0 \times \mu_2,$$

Numériquement :

$$E_2 = 24 \times 10^{-6} \times 220,$$
$$E_2 = \mathbf{5\,280\ microvolts.}$$

3° a) *Le noyau est vide.*

Le flux à travers la bobine décroît de Φ'_0 à o webers en un temps θ. Nous supposons que la courbe représentant la variation de flux est une droite (fig. 2). L'équation de cette droite est de la forme

$$\Phi = a\,t + b,$$

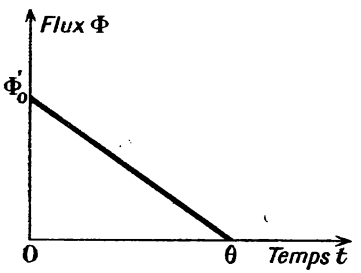


FIG. 2.

a et b étant deux constantes.

Au temps $t = 0$, $\Phi = \Phi'_0$ et, par suite, $b = \Phi'_0$.

Au temps $t = \theta$, $\Phi = 0$ et, par suite,

$$0 = a\,\theta + \Phi'_0 \text{ et } a = -\frac{\Phi'_0}{\theta}.$$

L'équation de la droite est donc

$$\Phi = -\frac{\Phi'_0}{\theta}\,t + \Phi'_0.$$

La f.é.m. d'induction instantanée qui prend naissance pendant la variation du flux est

$$e_0 = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi'_0}{\theta};$$

elle est constante.

La f.é.m. d'induction e_0 provoque l'apparition d'un courant induit dont le sens est donné par la loi de Lenz : le flux d'induction qu'il produit tend à s'opposer à la variation de flux inducteur. Le courant induit produit à l'intérieur du noyau une induction $\vec{B}$ de même sens que l'induction qui lui donne naissance et circule donc dans le même sens que I. Son intensité est donnée par la loi de Pouillet :

$$i_0 = \frac{e_0}{R} = \frac{\Phi'_0}{\theta R},$$

R désignant la résistance du fil.
i_0 est constante comme la f.é.m. e_0.
La résistance du fil est donnée par la formule

$$R = \rho \frac{l}{s},$$

dans laquelle l désigne la longueur du fil, s sa section et ρ la résistivité du métal.

Le fil comprend N′ spires de longueur πd; la longueur l est donc

$$l = \pi d N'.$$

Si d' est le diamètre du fil, sa section est

$$s = \pi \frac{d'^2}{4}.$$

La résistance du fil est donc

$$R = \rho \times \frac{\pi d N'}{\pi \frac{d'^2}{4}} = \frac{4 \rho d N'}{d'^2}.$$

La quantité de chaleur W_0 dégagée dans le fil par le courant induit est donnée par la loi de Joule :

$$W_0 = R i_0^2 \theta = R \left(\frac{\Phi'_0}{\theta R}\right)^2 \theta \text{ joules},$$

$$W_0 = \frac{\Phi'^2_0}{\theta R} \text{ joules}.$$

b) *Le noyau est en fonte* (perméabilité μ_1).

La quantité de chaleur W_1 dégagée par le courant induit est donnée par la relation

$$\frac{W_1}{W_0} = \frac{\Phi'^2_1}{\Phi'^2_0} = \frac{\mu_1^2}{1^2} = \mu_1^2,$$

d'où nous tirons

$$W_1 = W_0 \times \mu_1^2.$$

c) *Le noyau est en fer doux* (perméabilité μ_2).

Nous avons de même

$$W_2 = W_0 \times \mu_2^2.$$

Application numérique :

a) $\Phi'_0 = 24 \times 10^{-6} \times 20 = 480 \times 10^{-6}$ Wb, $\theta = \frac{1}{20}$ s,

$\rho = 50 \times 10^{-8}\ \Omega$ m, $d = 0{,}05$ m, $N' = 20$,

$d' = 0{,}5$ mm, ou $\frac{0{,}5}{1\,000}$ m.

$$R = \frac{4 \times 50 \times 10^{-8} \times 0{,}05 \times 20}{\frac{0{,}5^2}{10^6}},$$

$$R = 8\ \Omega.$$

$$W_0 = \frac{480^2 \times 10^{-12}}{\frac{1}{20} \times 8}, \qquad W_0 = \mathbf{0{,}576 \times 10^{-6}\ J}.$$

b) $W_1 = W_0 \times \mu_1^2 = 0{,}576 \times 10^{-6} \times 65^2 = 2433{,}6 \times 10^{-6}$ J,

$$\mathbf{W_1 = 2{,}43 \times 10^{-3}\ J}.$$

c) $W_2 = W_0 \times \mu_2^2 = 0{,}576 \times 10^{-6} \times 220^2 = 27878 \times 10^{-6}$ J,

$$\mathbf{W_2 = 27{,}9 \times 10^{-3}\ J}.$$

105. — Étude des phénomènes d'induction dans un circuit fermé : quantité d'électricité induite.

Une petite bobine B, à fil fin, comporte 800 spires de 10 cm² de surface. L'enroulement constitue un circuit fermé de résistance 50 ohms. On la dispose de manière que son axe soit horizontal et que le plan de ses spires soit perpendiculaire au méridien magnétique.

1° Calculer la valeur du flux dû au champ magnétique terrestre. Composante horizontale de l'induction terrestre : $\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}$ tesla.

2° On fait tourner la bobine de 180° autour d'un axe vertical passant par son centre.

a) Quelle est la variation de flux à travers les spires?

b) Quelle est la quantité d'électricité induite?

(*Sc. exp. Maroc, partiel.*)

1° *L'axe x'x de la bobine est horizontal* (fig. 1).

Nous l'orienterons dans le sens $\overrightarrow{x'x}$. Le méridien magnétique, perpendiculaire au plan des spires, est le plan de figure. L'induc-

tion magnétique terrestre est représentée par le vecteur $\vec{\mathcal{B}}$ qui forme avec $\overrightarrow{x'x}$ un angle I appelé inclinaison magnétique. La bobine B comporte N spires de surface S. Le flux d'induction magnétique à travers la bobine est donné par l'expression

$$\Phi = \mathcal{B}\ \mathrm{NS}\cos \mathrm{I}.$$

Φ est exprimé en webers si $\mathcal{B}$ est exprimé en teslas et S en mètres carrés.

Le terme $\mathcal{B}\cos \mathrm{I} = \mathcal{H}$ est la composante horizontale de l'induction magnétique terrestre. Par suite,

$$\Phi = \mathcal{H}\ \mathrm{NS}.$$

Avec la convention de signe employée le flux Φ est positif.

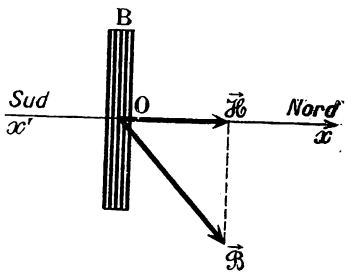


FIG. 1.

Application numérique :

$$\mathcal{H} = 0{,}2 \times 10^{-4}\ \mathrm{T};\quad \mathrm{N} = 800;\quad \mathrm{S} = 10\ \mathrm{cm}^2 = 10 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2.$$

$$\Phi = 0{,}2 \times 10^{-4} \times 800 \times 10 \times 10^{-4} = 16 \times 10^{-6},$$

$$\Phi = \mathbf{16 \times 10^{-6}\ weber.}$$

2° Projetons la bobine sur un plan horizontal (fig. 2).

a) Lorsque la bobine a tourné d'un angle α autour d'un axe

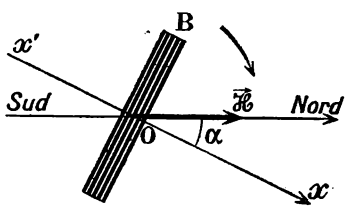


FIG. 2.

vertical passant par son centre et se projetant en O, le flux Φ prend la valeur

$$\Phi = \mathcal{H}\ \mathrm{NS}\cos\alpha.$$

L'angle α passant de la valeur o à la valeur π, le flux passe de la valeur $\Phi_1 = \mathcal{H}\ \mathrm{NS}$ à la valeur $\Phi_2 = -\mathcal{H}\ \mathrm{NS}$. La variation de flux à travers les spires est

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\mathcal{H}\ \mathrm{NS} - \mathcal{H}\ \mathrm{NS} = -2\,\mathcal{H}\ \mathrm{NS}$$

où, en valeur absolue,

$$|\Phi_2 - \Phi_1| = 2\,\mathcal{H}\,\mathrm{NS} = 2\,\Phi.$$

Application numérique :

$$|\Phi_2 - \Phi_1| = 2 \times 16 \times 10^{-6},$$
$$|\Phi_2 - \Phi_1| = \mathbf{32 \times 10^{-6}\ weber.}$$

b) Soit $\Delta\Phi$ la variation de flux à travers la bobine pendant un intervalle de temps Δt très petit. Le circuit fermé, constitué par la bobine est parcouru par un courant induit. La bobine est le siège d'une f.é.m. d'induction. Comptons positivement l'intensité du courant induit s'il produit une induction magnétique dans le sens $x'x$. Comptons positivement la f.é.m. d'induction si elle donne naissance à un courant de sens positif. Avec cette convention de signe, la f.é.m. d'induction moyenne est

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Elle est exprimée en volts si $\Delta\Phi$ est exprimée en webers et Δt en secondes.

R étant la résistance, l'intensité du courant induit est donnée par la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

La quantité d'électricité induite dans le temps Δt est

$$\Delta q = i\,\Delta t = -\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\Delta t = -\frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Elle est indépendante de la durée de variation du flux. Pendant l'intervalle de temps t correspondant à la rotation de la bobine la quantité d'électricité induite est

$$q = \Sigma\,\Delta q = -\frac{1}{R}\Sigma\,\Delta\Phi.$$

La variation de flux correspondant à une rotation de 180° étant

$$\Sigma\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -2\,\mathcal{H}\,\mathrm{NS},$$

la quantité q est donnée par l'expression

$$q = \frac{2\,\mathcal{H}\,\mathrm{NS}}{R}.$$

Application numérique.

$$2\,\mathcal{H}\,NS = 32 \times 10^{-6} \text{ weber}; \quad R = 50\ \Omega.$$

$$q = \frac{32 \times 10^{-6}}{50} = 64 \times 10^{-8} \text{ coulomb},$$

$$q = \mathbf{0{,}64 \text{ microcoulomb}}.$$

106. — F.é.m. induite dans un cadre se déplaçant d'un mouvement uniforme dans le champ magnétique d'un électro-aimant. Force s'opposant au déplacement.

Un électro-aimant produit une induction magnétique uniforme de 2 teslas entre deux pièces polaires de 4 cm de côté. La surface plane de l'une de ces pièces polaires est représentée en ABCD sur la figure; les lignes d'induction du champ lui sont perpendiculaires.

Un carré A′B′C′D′ en fil de cuivre de 1 mm² de section et de 4 cm de côté est entraîné de façon que A′C′ et B′D′ glissent respectivement sur AC et BD.

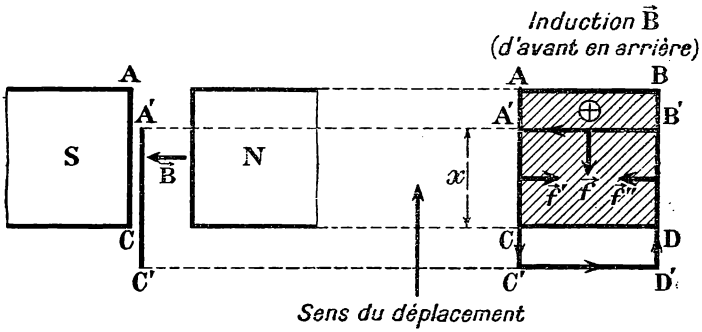
1° Calculer la force électromotrice induite et l'intensité du courant qui circule dans le fil, quand la vitesse du déplacement est 5 cm par seconde.

2° L'induction magnétique agissant sur le cadre parcouru par ce courant crée une force F qui s'oppose au déplacement. Calculer F pour la vitesse de 5 cm par seconde.

On calculera la résistivité du cuivre utilisé, sachant qu'un fil de ce cuivre, de 60 m de long et de 1 mm² de section, a une résistance de 1 ohm.

(Sç. exp., Strasbourg, partiel.)

1° Supposons que le cadre, de côté a, se déplace de A′ vers A avec la vitesse constante v. A un instant donné, il occupe la position



A′B′C′D′ telle que A′C = x. Le flux produit par l'induction uniforme $\vec{B}$ à travers la surface A′B′CD (c'est-à-dire à travers le cadre si nous

supposons l'induction nulle au dehors de l'entrefer) est donné par l'expression :

$$\Phi = B\,a\,x.$$

Φ est exprimé en webers si B est exprimé en teslas, a et x en mètres. Le déplacement du cadre donne lieu à une augmentation du flux Φ.

Une f.é.m. d'induction prend naissance, dont la valeur absolue est

$$e = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = Ba\frac{dx}{dt} = Bav \text{ volts.} \qquad (1)$$

Elle a une valeur constante pendant le déplacement.

Un courant induit circule dans le cadre. Son sens est donné par la loi de Lenz : le flux qu'il produit s'oppose à la variation du flux inducteur. Le courant circule donc dans le sens A'C'D'B'A' produisant une induction $\vec{B}'$ dirigée en sens inverse de $\vec{B}$. Son intensité, i, est donnée par la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e}{R}, \qquad (2)$$

R désignant la résistance du cadre.

Le fil constituant ce cadre ayant une longueur $4a$, une section s et une résistivité ρ, sa résistance est

$$R = \rho\frac{4a}{s}.$$

On sait d'autre part qu'un fil de même nature de longueur l_0 et de même section s a une résistance R_0 telle que

$$R_0 = \rho\frac{l_0}{s}.$$

De ces deux expressions nous déduisons :

$$R = R_0\frac{4a}{l_0}. \qquad (3)$$

En remplaçant dans (2) la f.é.m. e par sa valeur donnée par (1) et la résistance R par sa valeur donnée par (3), nous obtenons l'intensité i du courant.

Application numérique :

$B = 2$ teslas ; $a = 4$ cm $= 0{,}04$ m ; $v = 5$ cm/s $= 0{,}05$ m/s ; $R_0 = 1\ \Omega$; $l_0 = 60$ m.

$$e = 2 \times 0{,}04 \times 0{,}05 = 0{,}004 \text{ volt},$$

$$e = \mathbf{4 \text{ millivolts}},$$

$$R = 1 \times \frac{4 \times 0{,}04}{60} = \frac{0{,}008}{3}\ \Omega,$$

$$i = \frac{0{,}004}{\frac{0{,}008}{3}} = \frac{3}{2},$$

$$i = \mathbf{1{,}5\ ampère.}$$

2° Le cadre est parcouru par un courant induit. Le côté C'D' se déplace en dehors du champ d'induction et n'est soumis à aucune force électro-magnétique. Par contre, les trois autres côtés se déplacent dans le champ d'induction et sont soumis à des forces dont le sens est donné par la loi de Laplace. Le côté A'C' est soumis à une force $\vec{f'}$ perpendiculaire au plan défini par A'C' et $\vec{B}$ et dirigée vers la gauche de l'observateur d'Ampère. Le côté B'D' est soumis à une force $\vec{f''}$ égale et opposée à $\vec{f'}$. La résultante $\vec{F}$ des forces qui s'opposent au déplacement du cadre est égale à la force $\vec{f}$ qui s'exerce aur le côté A'B' normalement au plan défini par A'B' et $\vec{B}$ conformément à la règle de l'observateur d'Ampère et dont le module est donné par l'expression

$$f = i\,B\,a \sin \frac{\pi}{2} = F.$$

On a donc

$$F = i\,B\,a.$$

F est exprimée en newtons si i est exprimé en ampères, B en teslas et a en mètres.

Application numérique :

$$i = 1{,}5\ A\ ;\quad B = 2\ T\ ;\quad a = 4\ cm = 0{,}04\ m.$$
$$F = 1{,}5 \times 2 \times 0{,}04,$$
$$\mathbf{F = 0{,}120\ newton.}$$

Remarque. — On pourrait retrouver l'expression (1) de la f.é.m. d'induction en écrivant que le travail W de la force F (travail résistant) pendant le déplacement x correspondant au temps t est égal à l'énergie électrique W' qui apparaît pendant le même temps :

$$W = F \times x = i\,B\,a \times v\,t \text{ joules},$$
$$W' = e\,i\,t \text{ joules}.$$

Écrivons l'égalité de ces deux quantités :

$$i\,B\,a \times v\,t = e\,i\,t.$$

Nous en déduisons

$$e = B\,a\,v.$$

107. — Induction électromagnétique produite par le déplacement d'un élément de courant

Un élément conducteur rectiligne repose sans frottement sur deux rails, situés dans un plan horizontal, parallèles au plan du méridien magnétique du lieu et distants de 10 cm. Il est perpendiculaire aux rails. Un courant de 10 A le traverse.

1° Quelles sont les composantes horizontale et verticale des forces qui le sollicitent si l'induction terrestre est $0{,}4.10^{-4}$ tesla et est inclinée à 60° sur l'horizon ? Faire un schéma simple du système. Conclusion.

2° L'ensemble est placé dans une induction uniforme de 1 Wb/m² colinéaire à l'induction terrestre. Que deviennent les composantes précédentes ?

3° L'induction précédente étant maintenue, on ferme l'élément conducteur sur un circuit ne contenant plus de générateur et on le déplace sur les rails d'un mouvement uniforme de vitesse $v = 1$ m/s. Que se passe-t-il ?

Quelle est l'intensité du courant induit si le circuit a une résistance constante, égale à 1 ohm ?

4° On recommence l'opération en maintenant le générateur en circuit. Quelle devrait-être la vitesse du conducteur glissant pour que le courant résultant soit les $\frac{9}{10}$ du courant initial.

(Tahiti.)

1° Lorsque l'élément conducteur MN de longueur l mètres, placé dans le champ d'induction terrestre $\vec{\mathcal{B}}$ Wb/m², est parcouru par un courant d'intensité I ampères, il est soumis à un ensemble de forces électromagnétiques dont la résultante $\vec{f}$, appliquée au milieu O de MN, est donnée par la loi de Laplace :

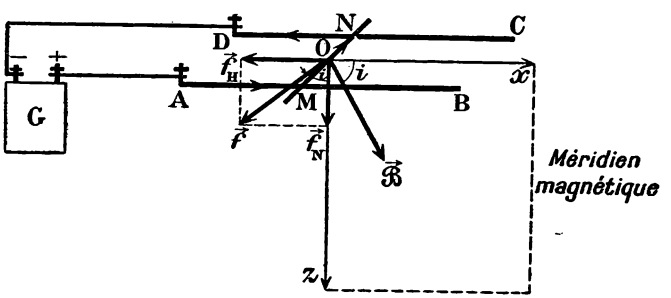


FIG. 1.

— direction : perpendiculaire au plan formé par l'élément MN et l'induction $\vec{\mathcal{B}}$;

— sens : gauche de l'observateur d'Ampère regardant dans le sens de $\vec{\mathcal{B}}$;
— module : donné par l'expression

$$f = \mathrm{I}\,\mathcal{B}\,l \text{ newtons.}$$

La direction de f fait avec la verticale Oz un angle i égal à l'inclinaison magnétique (l'angle fOz a ses côtés perpendiculaires à ceux de l'angle BOx). Les composantes horizontale et verticale de $\vec{f}$ ont donc pour modules :

$$f_{\mathrm{H}} = f \sin i = \mathrm{I}\,\mathcal{B}\,l \sin i,$$
$$f_{\mathrm{N}} = f \cos i = \mathrm{I}\,\mathcal{B}\,l \cos i.$$

Application numérique :

$$\mathrm{I} = 10\ \mathrm{A},\quad \mathcal{B} = 0{,}4 \times 10^{-4}\ \text{tesla},\quad l = 10\ \text{cm, ou } 0{,}10\ \text{m},\quad i = 60^{\circ}.$$

$$f_{\mathrm{H}} = 10 \times 0{,}4 \times 10^{-4} \times 0{,}10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}2 \times 10^{-4} \times \sqrt{3},$$

$$f_{\mathrm{H}} = \mathbf{0{,}346 \times 10^{-4}\ newton},$$

$$f_{\mathrm{N}} = 10 \times 0{,}4 \times 10^{-4} \times 0{,}10 \times \frac{1}{2},$$

$$f_{\mathrm{N}} = \mathbf{0{,}200 \times 10^{-4}\ newton.}$$

Ces forces sont très faibles (de l'ordre de quelques mgf).

2° Si l'on suppose que l'ensemble est placé dans une induction uniforme, $\vec{\mathrm{B}}$, les deux inductions ont pour résultante $\vec{\mathcal{R}}$ telle que

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathrm{B}}.$$

Si les inductions $\vec{\mathcal{B}}$ et $\vec{\mathrm{B}}$ sont colinéaires, l'induction résultante a pour module

$$\mathcal{R} = \mathcal{B} + \mathrm{B} = 0{,}4 \times 10^{-4} + 1 = 1{,}000\,04\ \mathrm{Wb/m^2}.$$

Nous pouvons négliger $\mathcal{B}$ devant B. En effet, en posant $\mathcal{R} = \mathrm{B}$, nous commettons une erreur relative

$$\frac{\Delta\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = \frac{0{,}4 \times 10^{-4}}{1} = \frac{4}{10^5}.$$

L'élément MN est soumis à une force $\vec{\mathrm{F}}$ ayant la direction et le sens de $\vec{f}$ et dont les composantes horizontale et verticale ont pour modules

$$\mathrm{F_H} = \mathrm{IB}l \sin i,$$
$$\mathrm{F_N} = \mathrm{IB}l \cos i.$$

Application numérique :

$$I = 10\ A, \quad B = 1\ \text{tesla}, \quad l = 0{,}10\ m, \quad i = 60^\circ.$$

$$F_H = 10 \times 1 \times 0{,}10 \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathbf{F_H = 0{,}866\ newton,}$$

$$F_N = 10 \times 1 \times 0{,}10 \times \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{F_N = 0{,}500\ newton.}$$

3° Le générateur étant retiré du circuit, lorsqu'on déplace MN dans le sens $\overrightarrow{Ox}$, la surface du circuit fermé RAMND augmente de $\Delta S = l \times \Delta x$. Le flux d'induction à travers ce circuit croît de

$$\Delta\Phi = \Delta S \times B \times \cos\theta = l \times \Delta x \times B \sin i = B_N \times l \times \Delta x,$$

B_N étant la composante normale de B.

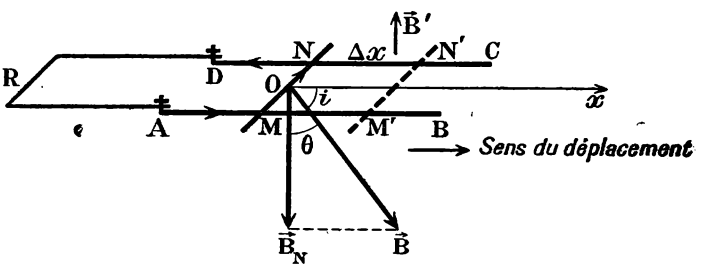


FIG. 2.

Cette variation de flux provoque l'apparition d'une f.é.m. d'induction e.

Un courant induit circule dans le circuit. Son sens est donné par la loi de Lenz : le flux qu'il produit s'oppose à la variation du flux inducteur. Le courant induit circule dans le sens AMND, produisant une induction $\vec{B}'$, perpendiculaire à ΔS et de sens contraire à $\vec{B}_N$.

Si l'élément MN se déplace avec une vitesse constante v, la distance qu'il parcourt pendant le temps Δt est $\Delta x = v\Delta t$. La variation de la surface S est

$$\Delta S = l\Delta x = lv\Delta t.$$

La variation de flux à travers le circuit fermé est

$$\Delta\Phi = B_N \times l\Delta x = B_N \times lv\Delta t.$$

La f.é.m. d'induction est donnée par l'expression

$$e = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = B_N \times lv.$$

Elle est constante comme v.

Le courant induit a une intensité constante i donnée par la loi de Pouillet :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{B_N \times lv}{R}.$$

L'intensité i est exprimée en ampères si l'on exprime B_N en Wb/m², l en m, v en m/s et R en Ω.

Si le déplacement avait lieu en sens inverse, un courant induit de même intensité prendrait naissance, mais circulerait en sens inverse.

Application numérique :

$$B_N = B \sin 60^0 = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ tesla},$$

$$l = 0{,}10 \text{ m}, \quad v = 1 \text{ m/s}, \quad R = 1 \ \Omega.$$

$$i = \frac{\sqrt{3} \times 0{,}10 \times 1}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{20},$$

$$i = \mathbf{0{,}086\ 6}\ \text{A}.$$

Remarque. — La f.é.m. d'induction est due au déplacement du seul élément conducteur MN. Elle est donc localisée dans cet élément. La tige MN se comporte comme un générateur de f.é.m. e dont les pôles seraient ses extrémités M et N. Le pôle positif de ce générateur est le point N si le déplacement a lieu dans le sens $\overrightarrow{Ox}$; c'est le point M si le déplacement a lieu en sens contraire.

D'ailleurs, si les points A et D n'étaient pas reliés par la résistance R, le courant induit n'existerait pas pendant le déplacement de la tige. Mais les extrémités M et N présenteraient une différence de potentiel V, donnée en valeur absolue par l'expression

$$V = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|,$$

$\Delta\Phi$ étant le flux « coupé » par l'élément de courant pendant le temps Δt. La tige se comporterait comme un générateur en circuit ouvert de f.é.m. $e = V$.

4° Si l'on maintient le générateur dans le circuit (fig. 1), lorsqu'on déplace l'élément MN de x avec la vitesse v', il y a production d'une f.é.m., e', en série avec celle du générateur, si le déplacement a lieu

dans le sens $\overrightarrow{Ox}$, en opposition avec celle du générateur si le déplacement a lieu en sens inverse.

La valeur absolue de e', si l'on néglige l'induction produite par le courant est celle qui a été trouvée dans la 3e partie du problème :

$$e' = B_N \times lv'.$$

L'intensité du courant induit est $i' = \frac{e'}{R}$. Elle s'ajoute à I si le déplacement a lieu dans le sens $\overrightarrow{Ox}$ et se retranche de I si le déplacement a lieu en sens contraire.

Puisque l'intensité I′ du courant résultant doit être inférieure à I, le déplacement de MN doit se produire en sens inverse de $\overrightarrow{Ox}$. L'intensité du courant induit, i', doit être telle que

$$I' = I - i' = \frac{9}{10} I,$$

d'où nous tirons

$$i' = \frac{I}{10}.$$

La vitesse v' de déplacement est donnée par l'expression

$$\frac{B_N \times lv'}{R} = \frac{I}{10},$$

d'où nous tirons

$$v' = \frac{RI}{10\, B_N\, l}.$$

Application numérique :

$$R = 1\ \Omega,\ I = 10\ A,\ B_N = \frac{\sqrt{3}}{2}\ Wb/m^2,\ l = 0{,}10\ m.$$

$$v' = \frac{1 \times 10}{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 0{,}10} = \frac{20\sqrt{3}}{3},$$

$$v' = \mathbf{11{,}55\ m/s.}$$

Remarque.

On aurait pu dire plus simplement : l'intensité i' du courant induit est proportionnelle à la vitesse de déplacement de l'élément MN :

$$\frac{v'}{v} = \frac{i'}{i}.$$

Nous en tirons $v' = v \times \frac{i'}{i}$.

Application numérique :

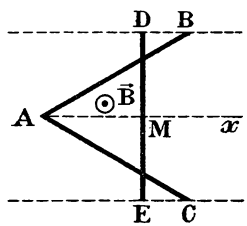
$$i' = \frac{I}{10} = 1 \text{ A}, \quad i = \frac{\sqrt{3}}{20} \text{ A} \quad \text{et} \quad v = 1 \text{ m/s}.$$

$$v' = 1 \times \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3},$$

$$v' = \mathbf{11{,}55 \text{ m/s}}.$$

108. — Courant d'induction dans un circuit de surface variable.

Deux fils résistants, AB et AC, de longueur l forment un angle de 60° dans un plan horizontal. Un troisième fil, DE, identique en nature, section et longueur aux deux précédents forme avec eux un triangle équilatéral de surface variable. Le milieu, M, de DE se déplace sur la bissectrice Ax avec une vitesse v. Cet ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme dont l'induction $\vec{B}$ est verticale et dirigée vers le haut.



Calculer :

1° la force électromotrice d'induction ;

2° l'intensité du courant induit ;

3° la force électromagnétique qui s'oppose au déplacement de DE ;

4° le travail produit dans ce déplacement ;

5° la quantité d'électricité induite ;

$l = 50$ cm ; résistance des fils $r = 1$ ohm par mètre ; B = 0,1 tesla ; $v = \sqrt{3}$ m/s.

1° *Force électromotrice d'induction.*

Désignons par x l'abscisse du milieu, M, du fil DE à l'instant t et par S l'aire du triangle AD'E' (fig. 1).

Le flux d'induction produit par B à travers la surface S à l'instant t est

$$\Phi = BS.$$

Lorsque le fil DE se déplace avec une vitesse v dans le sens $\vec{Ax}$ le flux à travers la surface triangulaire S croît. Cette variation de flux produit une f.é.m. d'induction e. Un courant induit circule dans le circuit. Son sens est donné par la loi de Lenz : le flux qu'il produit s'oppose à la variation du flux inducteur. Le courant circule dans le

sens AD'E'A (fig. 1) produisant une induction $\vec{B}'$ perpendiculaire à S et de sens contraire à $\vec{B}$.

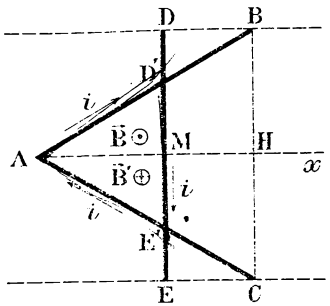


FIG. 1.

L'aire S a pour valeur

$$S = \frac{1}{2} D'E' \times AM.$$

Mais

$$AM = x = D'E' \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et, par suite,

$$D'E' = \frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

L'expression de S devient

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{3}} \times x = \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$$

Le fil DE est animé d'un mouvement de translation uniforme tel que

$$x = vt.$$

L'aire S est donc donnée, en fonction du temps, par l'expression

$$S = \frac{v^2 t^2}{\sqrt{3}}$$

et le flux d'induction Φ, à l'instant t, est

$$\Phi = \frac{B v^2 t^2}{\sqrt{3}}.$$

La f.é.m. d'induction, à l'instant t, est la dérivée (changée de signe), par rapport au temps de la fonction $\Phi = f(t)$:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}} B v^2 t.$$

Le signe — traduit la loi de Lenz : le courant induit produisant une induction $\vec{B}'$ opposée à $\vec{B}$ dans le cas étudié.

Prenons cette f.é.m. en valeur absolue en écrivant

$$e = \frac{2}{\sqrt{3}} B v^2 t.$$

La f.é.m. est proportionnelle au temps.

Pendant le déplacement du fil DE, x varie de o à $AH = l\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le temps varie de o à $\theta = \frac{AH}{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{l}{v}$.

La f.é.m. d'induction varie de o à e_θ telle que

$$e_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} Bv^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{v},$$
$$e_\theta = B\,v\,l.$$

Application numérique :

$B = 0{,}1$ tesla ; $l = 50$ cm $= 0{,}50$ m ; $v = \sqrt{3}$ m/s.

$$e = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 0{,}1 \times (\sqrt{3})^2 \times t = 0{,}2\sqrt{3}\,t,$$
$$e = \mathbf{0{,}346}\ t \text{ volts.}$$
$$e_\theta = 0{,}1 \times \sqrt{3} \times 0{,}50 = 0{,}05\ \sqrt{3},$$
$$e_\theta = \mathbf{0{,}086\ 6} \text{ volts.}$$

2° *Intensité du courant induit.*

Si nous désignons par R la résistance du circuit AD'E'A, le courant induit a une intensité

$$i = \frac{e}{R}.$$

La f.é.m. e a pour expression

$$e = \frac{2}{\sqrt{3}} B\,v^2\,t.$$

Par ailleurs, le fil a une résistance r ohms par mètre. La résistance du circuit triangulaire de longueur

$$AD' + D'E' + E'A = 3\,D'E'$$

est $$R = r \times 3\,D'E' = r \times 3 \times \frac{2x}{\sqrt{3}},$$

soit $$R = 2\sqrt{3}\,r\,v\,t.$$

L'intensité i est donc

$$i = \frac{e}{R} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} Bv^2t}{2\sqrt{3}\,rvt},$$

$$i = \frac{Bv}{3r}.$$

Cette intensité est constante.

Application numérique.

$$B = 0{,}1 \text{ tesla} ; \quad v = \sqrt{3} \text{ m/s} ; \quad r = 1 \ \Omega/\text{m}.$$

$$i = \frac{0{,}1 \times \sqrt{3}}{3 \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{30},$$

$$i = \mathbf{0{,}057\,7} \text{ A}.$$

3° *Calcul de la force électromagnétique.*

La force électromagnétique $\vec{f}$ (fig. 2) qui s'oppose au déplacement du fil DE, conformément à la loi de Lenz, est donnée par la loi de Laplace :

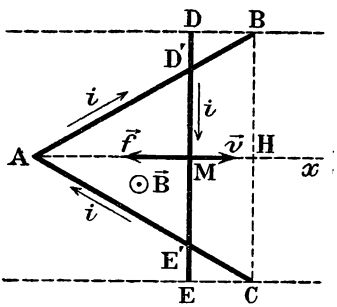


FIG. 2.

— direction : perpendiculaire au plan formé par l'élément de courant D'E' et l'induction $\vec{B}$;

— sens : gauche de l'observateur d'Ampère regardant dans le sens de $\vec{B}$;

— module : donné par l'expression

$$f = i \times B \times D'E'.$$

Or $\quad i = \dfrac{Bv}{3r} \quad$ et $\quad D'E' = \dfrac{2x}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} vt,$

$$f = \frac{Bv}{3r} \times B \times \frac{2}{\sqrt{3}} vt = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{B^2v^2t}{r}.$$

La force électromagnétique est proportionnelle au temps. Elle varie de 0 à f_θ, valeur de f pour $t = \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{l}{v}$.

$$f_\theta = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{B^2v^2}{r} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{l}{v} = \frac{B^2vl}{3r}.$$

Application numérique :

$B = 0{,}1$ tesla ; $v = \sqrt{3}$ m/s ; $l = 50$ cm $= 0{,}50$ m ; $r = 1\ \Omega/\text{m}$.

$$f = \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{0{,}1^2 \times (\sqrt{3})^2 t}{1} = \frac{\sqrt{3}}{150} t.$$

$$f = \mathbf{0{,}0115}\ t\ \mathbf{newtons.}$$

$$f_\theta = \frac{0{,}1^2 \times \sqrt{3} \times 0{,}5}{3 \times 1} = \frac{5\sqrt{3}}{3000}.$$

$$f_\theta = \mathbf{0{,}002\ 88\ newton.}$$

4° *Travail produit dans le déplacement.*

Lorsqu'un circuit parcouru par un courant constant i est soumis à une variation de flux $\Phi_2 - \Phi_1$ le travail des forces électromagnétiques est

$$W = i\ (\Phi_2 - \Phi_1).$$

Φ_1, flux initial à la date o est nul.
Φ_2, flux final à la date θ est égal au produit de B par la surface ABC :

$$\Phi_2 = B \times \frac{\overline{BC} \times \overline{AH}}{2} = B \times \frac{l \times l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Phi_2 = Bl^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

L'intensité est

$$i = \frac{Bv}{3r}.$$

Le travail cherché a pour expression

$$W = \frac{Bv}{3r} \times Bl^2 \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$W = \frac{\sqrt{3}}{12} \frac{B^2 l^2 v}{r}.$$

Application numérique :

$$B = 0{,}1 \text{ tesla} ; \quad l = 50 \text{ cm} = 0{,}50 \text{ m} ; \quad v = \sqrt{3} \text{ m/s} ; \quad r = 1\ \Omega/\text{m}.$$

$$W = \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{0{,}1^2 \times 0{,}50^2 \times \sqrt{3}}{1} = \frac{25}{4} \times 10^{-4},$$

$$\mathbf{W = 6{,}25 \times 10^{-4}\ joule.}$$

5° *Quantité d'électricité induite.*

L'intensité i étant constante dans l'intervalle de temps de o à θ, la quantité d'électricité induite est donc

$$Q = i\theta,$$

$$Q = \frac{Bv}{3r} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{v} = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{Bl}{r}.$$

Application numérique :

$$B = 0{,}1 \text{ tesla} ; \quad l = 50 \text{ cm} = 0{,}50 \text{ m} ; \quad r = 1 \ \Omega/\text{m}.$$

$$Q = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 0{,}1 \times 0{,}5 = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

$$\mathbf{Q = 0{,}014\ 4 \text{ coulomb.}}$$

CHAPITRE XXV

Problèmes de chimie.

109. — Volume d'acide sulfurique nécessaire pour obtenir 1 kg de sulfate de cuivre.

Quel volume de solution sulfurique contenant 50 % d'acide pur en masse faut-il utiliser pour obtenir, à partir d'oxyde cuivrique, 1 kg de sulfate de cuivre anhydre ?

$$S = 32,\ O = 16,\ Cu = 63,\ H = 1.$$

Densité de la solution : 1,4.

(Tahiti.)

La réaction de formation du sulfate de cuivre à partir d'acide sulfurique et d'oxyde cuivrique est la suivante :

$$H_2SO_4 + CuO \longrightarrow CuSO_4 + H_2O. \qquad (1)$$

La réaction fournit une solution bleue qui, par évaporation, laisse déposer des cristaux bleus de sulfate de cuivre pentahydratés de formule $CuSO_4, 5\,H_2O$. Par chauffage, ces cristaux se déshydratent et l'on obtient du sulfate de cuivre anhydre blanc $CuSO_4$.

Soit x grammes la masse d'acide sulfurique nécessaire pour obtenir m grammes de sulfate de cuivre anhydre.

La réaction (1) montre que le nombre de moles H_2SO_4 est égal au nombre de moles $CuSO_4$.

1 mole H_2SO_4 a une masse de $1 \times 2 + 32 + 16 \times 4 = 98$ g.
1 mole $CuSO_4$ a une masse de $63 + 32 + 16 \times 4 = 159$ g.

Écrivons l'égalité précédente indiquée par la réaction (1) :

$$\frac{x}{98} = \frac{m}{159}.$$

Cette relation donne x :

$$x = \frac{m \times 98}{159}.$$

La solution contenant 50 % d'acide pur en masse, pour avoir une masse de x grammes d'acide pur il faudra prendre

$$\frac{x \times 100}{50} = 2x \text{ grammes de cette solution.}$$

Désignons par v le volume de cette solution évalué en centimètres cubes. Par définition, sa densité d est égale au rapport de la masse totale de solution à la masse du même volume d'eau. La masse volumique de l'eau étant égale à 1 g/cm³, nous pouvons écrire

$$d = \frac{2x}{1 \times v} = \frac{2m \times 98}{159 \times 1 \times v}.$$

Nous en tirons :

$$v = \frac{2m}{d} \times \frac{98}{159}.$$

Application numérique :

$$m = 1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g}, \quad d = 1{,}4.$$

$$v = \frac{2 \times 1\,000 \times 98}{1{,}4 \times 159} = 880{,}5 \text{ cm}^3.$$

$$v = \mathbf{880 \text{ cm}^3}.$$

110. — Dosage volumétrique d'une solution d'acide chlorhydrique. Action de cette solution sur l'aluminium et le bioxyde de manganèse.

1° En vue de doser une solution d'acide chlorhydrique du commerce, on dilue cette solution au dixième avec de l'eau distillée et l'on prélève 10 cm³ de cette solution diluée que l'on neutralise à l'aide d'une solution de soude 0,5 N. Décrire l'expérience de dosage.

Il a fallu 24 cm³ de la solution de soude pour effectuer la neutralisation. Quel est le titre de la solution d'acide chlorhydrique du commerce ?

2° Dans 100 cm³ de la solution chlorhydrique diluée au dixième on ajoute 3 g d'aluminium. On attend que la réaction soit terminée. Quelle est la masse des ions aluminium dans la solution ? Quel est le volume d'hydrogène dégagé ?

On filtre la solution et l'on reprend l'aluminium métallique qui reste sur le filtre ; on l'attaque par une solution concentrée de soude en excès.

Écrire l'équation chimique représentant la réaction.

Calculer le volume de gaz dégagé.

3° On attaque par un excès de la solution d'acide chlorhydrique du commerce 10 g de bioxyde de manganèse. Décrire l'expérience.

Quel est le gaz qui se dégage et quel est son volume ?

Tous les volumes gazeux sont supposés mesurés dans les conditions normales de température et de pression.

Al = 27, O = 16, Mn = 55, Cl = 35,5, H = 1.

(France métropolitaine.)

1° *Description du dosage.*

A l'aide d'une pipette graduée, on prélève 10 cm³ de la solution d'acide chlorhydrique du commerce (solution A) que l'on verse dans un ballon jaugé de 100 cm³. On achève de remplir avec de l'eau distillée. On obtient ainsi 100 cm³ de solution diluée au dixième (solution B).

Avec la même pipette, préalablement lavée avec la solution B, on prélève un volume $v = 10$ cm³ de cette solution B, on la verse dans un bécher et l'on ajoute quelques gouttes de réactif coloré, du tournesol par exemple. Ce réactif vire au rouge. Le bécher est ensuite placé sous une burette graduée renfermant la solution de soude 0,5 N. On verse cette solution goutte à goutte dans le mélange en agitant constamment, jusqu'à ce que le tournesol vire au bleu A ce moment, l'acide est exactement neutralisé par la soude :

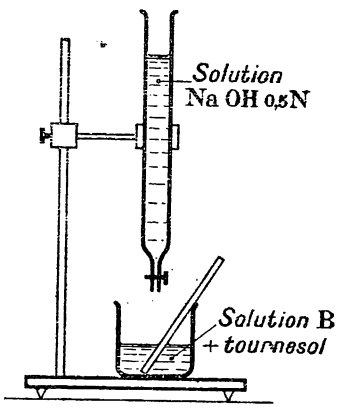


FIG. 1.

$$HCl + NaOH \rightarrow NaCl + H_2O.$$

Calcul du titre de la solution acide.

Soit t le titre, en moles par litre, de la solution d'acide B. Le titre t' de la solution de soude 0,5 N est $t' = 0{,}5$ mole par litre. La réaction précédente montre que le nombre de moles d'acide contenues dans le volume $v = 10$ cm³ est égal au nombre de moles de soude contenues dans le volume $v' = 24$ cm³. Nous pouvons donc écrire

$$\frac{t \times v}{1\,000} = \frac{t' \times v'}{1\,000},$$

relation qui nous donne t :

$$t = t' \times \frac{v'}{v}.$$

Le titre de la solution A non diluée est donc

$$\tau = 10\ t = 10 \times t' \times \frac{v'}{v} \text{ moles par litre.}$$

La mole HCl ayant une masse de $1 + 35{,}5 = 36{,}5$ g, la masse d'acide contenue dans 1 l de solution est

$$m = \tau \times 36{,}5 \text{ g.}$$

Application numérique :

$$t' = 0{,}5, \quad v = 10 \text{ cm}^3, \quad v' = 24 \text{ cm}^3.$$

$$\tau = 10 \times 0{,}5 \times \frac{24}{10}, \quad \tau = 12 \text{ moles par litre.}$$

$$m = 12 \times 36{,}5, \quad m = \mathbf{438 \text{ g/l}}.$$

2° *Masse des ions aluminium.*

L'acide chlorhydrique attaque l'aluminium en donnant du chlorure d'aluminium et un dégagement d'hydrogène :

$$3\ HCl + Al \longrightarrow AlCl_3 + \frac{3}{2} \nearrow H_2.$$

En écriture ionique,

$$3\ H^+ + Al \longrightarrow Al^{+++} + \frac{3}{2} \nearrow H_2. \qquad (1)$$

Nous voyons qu'une mole Al^{+++} correspond à 3 moles H^+, c'est-à-dire à 3 moles HCl.

100 cm³ de la solution B correspondent à 10 cm³ de la solution A et renferment $\tau \times \frac{10}{1\,000} = \frac{\tau}{100}$ moles HCl. Le nombre de moles Al^{+++} est donc $\frac{1}{3} \times \frac{\tau}{100} = \frac{\tau}{300}$. La masse atomique de l'aluminium étant égale à 27, la masse des ions Al^{+++} formés est

$$m' = \frac{\tau}{300} \times 27 = \frac{9}{100}\,\tau.$$

Application numérique :

$$\tau = 12 \text{ moles/l}.$$

$$m' = \frac{9 \times 12}{100},$$

$$m' = \mathbf{1{,}08 \text{ g}}.$$

Volume de l'hydrogène dégagé.

La réaction (1) montre qu'une mole Al^{+++} correspond à $\frac{3}{2}$ moles H_2. Le nombre de moles H_2 dégagées dans la réaction est donc

$$\frac{3}{2} \times \frac{\tau}{300} = \frac{\tau}{200}.$$

Le volume molaire étant 22,4 litres, le volume d'hydrogène dégagé est

$$v = \frac{\tau}{200} \times 22{,}4 \text{ l.}$$

Application numérique :

$$\tau = 12 \text{ moles/l.}$$

$$v = \frac{12}{200} \times 22{,}4,$$

$$v = \mathbf{1{,}344} \text{ l.}$$

Réaction sur la soude de l'aluminium en excès.

L'aluminium qui reste sur le filtre a une masse

$$m' = 3 - 1{,}08 = 1{,}92 \text{ g.}$$

Cet aluminium, attaqué par une solution concentrée de soude, donne de l'aluminate de sodium $Na(AlO_2)$ et un dégagement d'hydrogène :

$$Al + NaOH + H_2O \longrightarrow Na(AlO_2) + \frac{3}{2} H_2.$$

Cette réaction montre qu'une mole Al donne naissance à $\frac{3}{2}$ moles H_2. Le nombre de moles Al contenues dans la masse m' étant égal à $\frac{m'}{27}$, le nombre de moles H_2 dégagées est

$$\frac{3}{2} \times \frac{m'}{27} = \frac{m'}{18}.$$

Le volume d'hydrogène dégagé dans cette réaction est donc

$$v' = \frac{m'}{18} \times 22{,}4 = \frac{1{,}92}{18} \times 22{,}4,$$

soit

$$v' = \mathbf{2{,}39 \text{ litres.}}$$

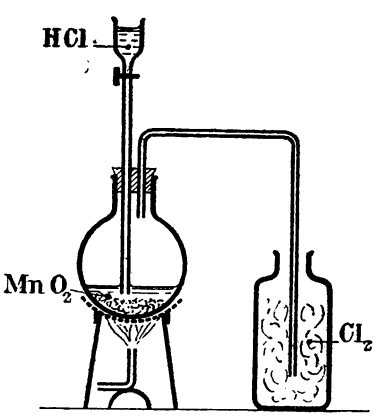


FIG. 2.

3° *Réaction de l'acide chlorhydrique sur le bioxyde de manganèse.*

On introduit le bioxyde de manganèse granulé MnO_2 dans un ballon muni d'un tube à dégagement et d'un tube à entonnoir à robinet dans lequel on verse la solution HCl (fig. 2).

On ouvre le robinet et l'on introduit quelques centimètres cubes de solution HCl dans le ballon. On chauffe doucement. Un gaz verdâtre plus lourd que l'air se dégage : c'est du chlore. On peut recueillir ce gaz dans un col droit par simple déplacement :

La réaction est la suivante :

$$4\,HCl + MnO_2 \longrightarrow MnCl_2 + 2H_2O + Cl_2.$$

Volume du gaz dégagé. — La réaction précédente montre qu'une mole MnO_2 donne naissance à une mole Cl_2. La masse molaire de MnO_2 étant

$$55 + 16 \times 2 = 87,$$

le nombre de moles MnO_2 contenues dans 10 g de ce corps est égal à $\frac{10}{87}$.

Le nombre de moles Cl_2 est également $\frac{10}{87}$.

Le volume de chlore dégagé est donc

$$v'' = \frac{10}{87} \times 22{,}4,$$

soit

$$v'' = \mathbf{2{,}57\ litres.}$$

111. — Dosage volumétrique et pondéral d'une solution d'acide sulfurique.

On brûle complètement dans l'oxygène une masse m de soufre. Le gaz formé, totalement recueilli, est dissous dans 1 litre d'eau. Le liquide obtenu est oxydé complètement. On obtient alors une solution acide, A.

1° On fait le dosage de la solution A à l'aide d'une solution normale de soude. Il faut verser 4 centimètres cubes de soude dans 10 centimètres cubes de solution A pour obtenir le virage du réactif coloré.

a) **Décrire l'expérience avec précision.**

b) **Déterminer le titre et la normalité de la solution A ainsi que la masse m d'acide pur contenu dans 1 litre de solution.**

2° Pour vérifier le titre de la solution A, on en prend 10 centimètres cubes, et l'on traite par un excès de chlorure de baryum. Le précipité, lavé et séché, pèse 0,466 gramme.

Ce résultat est-il en accord avec celui de la question *b*) précédente ?

Calculer, en outre, la masse m de soufre dont on est parti.

3° 10 centimètres cubes de la solution A sont versés sur de la grenaille de zinc en excès. Quelle est la nature du gaz obtenu ? Calculer son volume mesuré dans les conditions normales de température et de pression.

On donne les masses atomiques suivantes :

S = 32 ; Ba = 137 ; O = 16 ; H = 1.

(Madagascar.)

Lorsqu'on brûle le soufre dans l'oxygène, on obtient de l'anhydride sulfureux gazeux :

$$S + O_2 \longrightarrow SO_2.$$

Ce gaz, dissous dans l'eau et mis en présence d'un oxydant, se transforme en acide sulfurique :

$$SO_2 + O + H_2O \longrightarrow H_2SO_4.$$

1° *a*) *Description du dosage.*

(Cf. problème n° 110).

b) Soit t le titre de la solution A en moles d'acide pur par litre.

Au moment où le réactif coloré commence à virer, l'acide sulfurique contenu dans le bécher est exactement neutralisé par la soude :

$$H_2SO_4 + 2\,NaOH \longrightarrow Na_2SO_4 + 2\,H_2O.$$

Cette réaction montre que le nombre de moles d'acide est la moitié du nombre de moles de soude. La solution normale de soude contenant 1 mole par litre, le nombre de moles NaOH contenues dans 4 cm³ de solution N est $\frac{1 \times 4}{1\,000}$. Le nombre de moles H_2SO_4 contenues dans les 10 cm³ de solution A est $\frac{t \times 10}{1\,000}$. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{t \times 10}{1\,000} = \frac{1}{2} \times \frac{1 \times 4}{1\,000}.$$

Cette relation donne t :

$$t = \mathbf{0{,}2\ mole\ par\ litre.}$$

La solution contenant 1 mole H_2SO_4 par litre, c'est-à-dire 2 moles H^+ par litre, étant 2 fois normale, la normalité c de la solution de titre t est

$$c = 2\,t = 2 \times 0{,}2,$$

soit

$$c = \mathbf{0{,}4}.$$

La masse molaire de l'acide sulfurique étant 98, la masse d'acide pur contenue dans 1 litre de solution est

$$m' = 0{,}2 \times 98,$$
$$m' = \mathbf{19{,}6\ g/l}.$$

2° *Dosage pondéral de la solution d'acide.*

L'acide sulfurique, en présence d'une solution de chlorure de baryum $BaCl_2$, donne un précipité de sulfate de baryum $BaSO_4$:

$$H_2SO_4 + BaCl_2 \longrightarrow \underline{BaSO_4}\downarrow + 2\,HCl.$$

Cette réaction montre que le nombre de moles H_2SO_4 est égal au nombre de moles $BaSO_4$.

Le nombre de moles H_2SO_4 contenues dans 10 cm³ de la solution A est $\frac{t \times 10}{1\,000} = \frac{t}{100}$.

La masse molaire de $BaSO_4$ étant $137 + 32 + 16 \times 4 = 233$, le nombre de moles $BaSO_4$, contenues dans 0,466 g de précipité, est $\frac{0{,}466}{233} = \frac{2}{1\,000}$.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{t}{100} = \frac{2}{1\,000},$$

d'où nous tirons

$$t = \mathbf{0{,}2\ mole\ par\ litre.}$$

Ce résultat est identique à celui qui a été déterminé par l'analyse volumétrique.

Calcul de la masse de soufre.

Une mole S donne naissance à une mole SO_2 et, par suite, à une mole H_2SO_4. La solution A (1 litre) renferme 0,2 mole H_2SO_4, correspondant à 0,2 mole S.

La masse de soufre dont on est parti est donc

$$m = 0{,}2 \times 32,$$
$$m = \mathbf{6{,}4}\ \text{g}.$$

3° L'acide sulfurique réagit sur le zinc pour donner du sulfate de zinc $ZnSO_4$ et un dégagement d'hydrogène :

$$Zn + H_2SO_4 \longrightarrow ZnSO_4 + \overset{\nearrow}{H_2}.$$

Cette réaction montre qu'une mole H_2SO_4 donne naissance à une mole H_2.

10 cm³ de la solution A renferment $0{,}2 \times \frac{10}{1\,000} = 0{,}002$ mole H_2SO_4, qui donne naissance à 0,002 mole H_2.

Le volume d'hydrogène dégagé est donc

$$v = 0{,}002 \times 22{,}4 = 0{,}0448 \text{ litre}.$$
$$v = \mathbf{44{,}8\ cm^3}.$$

112. — Action d'un mélange d'acides étendus sur du fer en excès. Réduction d'un oxyde de cuivre par l'hydrogène dégagé dans cette réaction.

Une solution S est constituée par un mélange d'acide chlorhydrique et d'acide sulfurique étendus. Un litre de cette solution contient une mole d'acide chlorhydrique et une demi-mole d'acide sulfurique.

On traite un excès de fer par 50 cm³ de la solution S et l'on dessèche le gaz qui se dégage.

1° Calculer le volume de ce gaz sec dans les conditions normales.

2° Calculer la masse du fer qui a réagi (Fe = 56).

3° Le gaz sec obtenu passe, lentement, dans un tube chauffé contenant 5 g d'oxyde cuivrique. En supposant que tout le gaz réagisse, déterminer la composition quantitative du mélange contenu dans le tube à la fin de l'expérience.

(O = 16 et Cu = 63,5.)

(Grenoble.)

1° L'acide chlorhydrique et l'acide sulfurique en solution étendue attaquent le fer en donnant un dégagement d'hydrogène et un sel ferreux (milieu réducteur). Les équations de réaction sont les suivantes :

$$2\,HCl + Fe \longrightarrow \nearrow H_2 + FeCl_2, \qquad (1)$$

$$H_2SO_4 + Fe \longrightarrow \nearrow H_2 + FeSO_4. \qquad (2)$$

Le fer étant en excès la totalité de chaque acide disparaît.

L'hydrogène obtenu provient :

a) de l'acide chlorhydrique à raison de 1 mole H_2 pour 2 moles HCl;

b) de l'acide sulfurique à raison de 1 mole H_2 pour 1 mole H_2SO_4.

Le nombre n de moles H_2 obtenu est donc égal à

$$\frac{n_1}{2} \text{ moles } HCl + n_2 \text{ moles } H_2SO_4,$$

n_1 et n_2 étant les nombres de moles d'acide chlorhydrique et d'acide sulfurique contenues dans 50 cm³ de solution.

La solution contenant par litre 1 mole HCl et $\frac{1}{2}$ mole H_2SO_4, nous avons $n_1 = \frac{1 \times 50}{1\,000}$ mole HCl et $n_2 = \frac{1 \times 50}{2 \times 1\,000}$ mole H_2SO_4; d'où

$$n = \frac{n_1}{2} + n_2 = \frac{1 \times 50}{2 \times 1000} + \frac{1 \times 50}{2 \times 1\,000} = \frac{5}{100}.$$

Le volume d'hydrogène correspondant, mesuré, sec, dans les

conditions normales de température et de pression est, en prenant pour volume molaire dans ces mêmes conditions 22 400 cm^3,

$$v = 22\,400 \times n = 22\,400 \times \frac{5}{100}.$$

$$v = \mathbf{1120\ cm^3}.$$

2° La masse de fer qui a réagi est encore donnée par les deux équations de réaction (1) et (2). D'après ces équations le nombre de moles Fe est le même que le nombre de moles H_2. Pour les 50 cm^3 de solution employée, le nombre de moles Fe est

$$n = \frac{5}{100}.$$

La masse correspondante est, en prenant pour masse atomique 56,

$$m = n \times 56 = \frac{5}{100} \times 56.$$

$$m = \mathbf{2{,}80\ g}.$$

3° L'hydrogène obtenu donne par réaction sur l'oxyde cuivrique de l'eau et du cuivre. L'équation de réaction est la suivante :

$$H_2 + CuO \rightarrow H_2O + Cu. \qquad (3)$$

D'après cette équation le nombre de moles H_2 est le même que le nombre de moles CuO et que le nombre de moles Cu.

Si tout l'hydrogène a réagi $\left(\frac{5}{100}\text{ mole}\right)$ on a donc utilisé $\frac{5}{100}$ mole CuO et l'on a obtenu $\frac{5}{100}$ mole Cu, qui représente, en prenant pour masse molaire de CuO, 63,5 + 16 = 79,5 g et pour masse molaire de Cu, 63,5 g,

$$\frac{5}{100} \times 79{,}5 = 3{,}975\text{ g de CuO},$$

et

$$\frac{5}{100} \times 63{,}5 = 3{,}175\text{ g de Cu}.$$

Puisque le tube à réduction contenait 5 g d'oxyde cuivrique c'est qu'il y avait de l'oxyde cuivrique en excès.

La masse d'oxyde cuivrique qui n'a pas réagi est donc

$$5 - 3{,}975 = 1{,}025\text{ g}.$$

La composition quantitative du mélange contenu dans le tube à la fin de l'expérience est alors

1,025 g CuO + **3,175 g** Cu.

113. — Étude du traitement d'une blende.

Une blende contenant 16 % de sulfure de zinc subit un triage et un enrichissement et à cette occasion une première perte de 4 %, puis un grillage dont le rendement est 93 %, enfin une troisième perte de 15 % lors de la réduction, ces pourcentages étant relatifs à la masse du métal engagé dans chacune des opérations envisagées.

Indiquer :

1° *a*) la masse de zinc tiré d'une tonne de cette blende ;

b) la masse de blende nécessaire à l'obtention d'une tonne de zinc commercial ;

2° *a*) le volume (en m^3) d'anhydride sulfureux produit avec une tonne de minerai ;

b) le volume (en m^3) d'air nécessaire au grillage de cette tonne de minerai. On prendra comme composition de l'air : 1 volume d'oxygène + 4 volumes d'azote ;

3° le pourcentage de carbone employé à la réduction de l'oxyde de zinc, sachant qu'une tonne de zinc commercial exige 4,5 tonnes de charbon à 94 % de carbone.

4° On attaque 2 g de ce zinc commercial légèrement plombifère par un excès d'acide chlorhydrique qui n'attaque pas le plomb dans ces conditions et l'on obtient 675 cm^3 de gaz. Quel est le pourcentage de zinc dans le zinc brut traité ?

N. B. — Les volumes gazeux sont mesurés dans les conditions normales.
Zn = 65,4, S = 32, O = 16, C = 12.
La quatrième question est indépendante des trois premières.
L'emploi de la règle à calcul est recommandé.

(*Lille.*)

1° Désignons par m tonne la masse de zinc tiré d'une tonne de minerai après les divers traitements qu'elle subit.

Au départ, le minerai contient $\frac{16}{100}$ de sulfure de zinc ZnS.

Le sulfure de zinc contenant $\frac{Zn}{Zn + S} = \frac{65,4}{65,4 + 32} = \frac{65,4}{97,4}$ de sa masse de zinc, une tonne de minerai contient

$$\frac{65,4}{97,4} \times \frac{16}{100} \text{ tonne de zinc.}$$

Le triage et l'enrichissement occasionnant une perte de $\frac{4}{100}$ de zinc la masse de zinc restant après cette première opération est les $\frac{96}{100}$ de la masse précédente soit

$$m_1 = \frac{65,4}{97,4} \times \frac{16}{100} \times \frac{96}{100} \text{ tonne.}$$

Le grillage ayant un rendement de $\frac{93}{100}$ la masse de zinc restant après cette deuxième opération est $m_2 = m_1 \times \frac{93}{100}$,

$$m_2 = \frac{65,4}{97,4} \times \frac{16}{100} \times \frac{96}{100} \times \frac{93}{100} \text{ tonne.}$$

La réduction s'effectuant avec une perte de $\frac{15}{100}$, la masse de zinc finalement obtenu est les $\frac{85}{100}$ de la masse m_2 précédente, soit

$$m = \frac{65,4}{97,4} \times \frac{16}{100} \times \frac{96}{100} \times \frac{93}{100} \times \frac{85}{100} \text{ tonne.}$$

$$m = \mathbf{0,081\,5 \text{ tonne.}}$$

b) Si 1 tonne de minerai fournit m tonne de zinc, pour avoir 1 tonne de zinc il faudra prendre une masse de minerai

$$M = \frac{1}{m} = \frac{1}{0,0815} \text{ tonnes,} \qquad \mathbf{M = 12,27 \text{ tonnes.}}$$

2° *a*) Le grillage du sulfure de zinc fournit de l'oxyde de zinc et de l'anhydride sulfureux. L'équation de réaction s'écrit

$$ZnS + \frac{3}{2} O_2 \longrightarrow ZnO + \overset{\nearrow}{SO_2}. \qquad (1)$$

Ce grillage porte sur une certaine masse de sulfure de zinc obtenu à partir de 1 tonne de minerai, et qui, lui-même, contient une masse de zinc

$$m_1 = \frac{65,4}{97,4} \times \frac{16}{100} \times \frac{96}{100} \text{ tonne.}$$

D'après l'équation de réaction 1 mole ZnS, laquelle contient une mole Zn, fournit 1 mole SO_2.

m_1 tonne Zn contient $\frac{m_1 \times 10^6}{65,4}$ mole Zn et fournit le même nombre de moles de SO_2 soit, en prenant pour volume molaire 22,4 litres ou 0,022 4 m^3, un volume de SO_2

$$v = \frac{m_1 \times 10^6}{65,4} \times 0,022\,4 \text{ m}^3,$$

$$v = \frac{65,4}{97,4} \times \frac{16}{100} \times \frac{96}{100} \times \frac{10^6}{65,4} \times 0,022\,4,$$

$$v = \frac{2,24}{97,4} \times 16 \times 96 = 37,4,$$

$$v = \mathbf{37,4 \text{ m}^3.}$$

b) Désignons par V le volume d'air exigé par le grillage de 1 tonne de minerai.

D'après l'équation de réaction il faut $\frac{3}{2}$ mole d'oxygène pour 1 mole SO_2. En d'autres termes le volume d'oxygène nécessaire est les $\frac{3}{2}$ du volume de SO_2 obtenu.

1 tonne de minerai fournissant un volume v m³ de SO_2, le volume d'oxygène nécessaire est donc $\frac{3}{2} v$ m³.

L'air contenant $\frac{1}{5}$ de son volume d'oxygène, le volume d'air correspondant sera $V = 5 \times \frac{3}{2} v$, ou

$$V = \frac{15}{2} \times 37{,}4 = 280{,}5,$$

$$\mathbf{V = 281\ m^3.}$$

3° La réduction de l'oxyde de zinc obtenu par grillage, est faite au moyen du carbone à une température voisine de 1 000°C. Dans ces conditions il se forme du zinc et de l'oxyde de carbone. L'équation de réaction s'écrit

$$ZnO + C \longrightarrow Zn + CO.$$

D'après cette équation 1 mole Zn exige 1 mole C. 1 tonne de zinc contenant $\frac{10^6}{65{,}4}$ moles Zn exige donc le même nombre de moles C, soit une masse de carbone de x tonnes telle que

$$x = \frac{10^6}{65{,}4} \times \frac{12}{10^6} = \frac{12}{65{,}4}.$$

En réalité, 1 tonne de zinc exige 4,5 tonnes de charbon à $\frac{94}{100}$ de carbone soit une masse de carbone de x' tonnes telle que

$$x' = 4{,}5 \times \frac{94}{100}$$

dont seulement une partie, x tonnes, est employée à la réduction. Le pourcentage de carbone employé à la réduction est donc

$$y = \frac{x}{x'} \times 100,$$

ou

$$y = \frac{12}{65{,}4} \times \frac{100}{4{,}5 \times 94} \times 100.$$

$$\mathbf{y = 4{,}34\ \%.}$$

4° L'acide chlorhydrique attaque le zinc en donnant du chlorure de zinc et de l'hydrogène.

L'équation de réaction s'écrit

$$2\,HCl + Zn \rightarrow ZnCl_2 + \nearrow H_2.$$

D'après cette équation, 1 mole Zn donne 1 mole H_2. Le nombre de moles Zn contenues dans 2 g de zinc commercial est donc le même que le nombre de moles d'hydrogène contenus dans 675 cm^3 :

$$\frac{675}{22\,400}.$$

La masse de zinc correspondante est, pour 2 g de zinc commercial

$$m = \frac{675}{22\,400} \times 65{,}4 \text{ g},$$

et, pour 100 g,

$$M = \frac{m \times 100}{2},$$

$$M = \frac{675}{22\,400} \times 65{,}4 \times \frac{100}{2} = 98{,}5.$$

$$\mathbf{M = 98{,}5\ \%}.$$

114. — Composition d'une alumine hydratée. Action de l'acide chlorhydrique sur l'aluminium.

1° Un mélange d'alumine hydratée pure et d'eau pesant 90 g est chauffé jusqu'à masse constante. On note une diminution de masse égale à 39 g. Quelle est la composition du mélange? Quelle masse d'aluminium peut-on extraire de 450 t de ce mélange?

2° On dissout 2,7 g d'aluminium pur dans l'acide chlorhydrique en quantité suffisante. Il se dégage un gaz ; indiquer son nom et son volume dans les conditions normales. Indiquer la masse du composé formé.

H = 1, O = 16, Al = 27, Cl = 35,5.

(Réunion.)

1° *Composition du mélange.*

Lorsqu'on chauffe jusqu'à masse constante un mélange d'alumine hydratée $Al(OH)_3$ et d'eau H_2O, il y a d'abord évaporation de l'eau puis décomposition de l'alumine hydratée suivant la réaction

$$2\,Al(OH)_3 \rightarrow Al_2O_3 + 3\,H_2O.$$

Désignons par x et y les masses respectives en grammes de $Al(OH)_3$ et H_2O contenues dans m grammes du mélange.

Nous avons

$$x + y = m. \qquad (1)$$

D'autre part, la diminution de masse, m' grammes du mélange correspond à y grammes d'eau et à la masse d'eau que fournit la décomposition de x grammes de $Al(OH)_3$.

D'après l'équation de décomposition de l'alumine hydratée nous voyons que le nombre de moles H_2O est les $\frac{3}{2}$ du nombre de moles $Al(OH)_3$.

Les masses molaires de H_2O et $Al(OH)_3$ étant respectivement 18 et 78, la masse de l'eau que fournit x grammes $Al(OH)_3$ est

$$\frac{3}{2} \times \frac{x}{78} \times 18 = \frac{9}{26} x.$$

Nous avons donc

$$\frac{9}{26} x + y = m'. \qquad (2)$$

Le système d'équations (1) et (2) permet de calculer x et y, connaissant m et m'.

Application numérique : $m = 90$ g ; $m' = 39$ g.

Le système des équations (1) et (2) s'écrit

$$x + y = 90,$$
$$\frac{9x}{26} + y = 39.$$

Nous en tirons :

$$x - \frac{9x}{26} = 90 - 39. \qquad x = \mathbf{78\ g.}$$
$$y = 90 - 78. \qquad y = \mathbf{12\ g.}$$

Masse d'aluminium que l'on peut extraire de M *tonnes de mélange.*

De m grammes de mélange on peut extraire l'aluminium contenu dans les x grammes d'alumine hydratée $Al(OH)_3$, soit $\frac{27 \times x}{78}$ g.

La masse d'aluminium (en tonnes) que fourniront M tonnes de mélange sera

$$z = \frac{27}{78} \times \frac{x}{m} \times M.$$

Application numérique : $x = 78$ g ; $m = 90$ g ; $M = 450$ t.

$$z = \frac{27}{78} \times \frac{78}{90} \times 450. \qquad z = \mathbf{135\ t.}$$

2° L'acide chlorhydrique réagit sur l'aluminium en donnant un dégagement gazeux d'hydrogène et un sel, le chlorure d'aluminium :

$$Al + 3\,HCl \rightarrow \frac{3}{2}\,H_2\uparrow + AlCl_3.$$

Volume d'hydrogène obtenu à partir d'une masse m_1 d'aluminium.

Désignons par v ce volume. D'après l'équation de réaction nous pouvons écrire que le nombre de moles H_2 est les $\frac{3}{2}$ du nombre de moles Al, $\frac{m_1}{27}$. Le volume molaire normal étant 22 400 cm³, nous avons donc

$$v = \frac{3}{2} \times \frac{m_1}{27} \times 22\,400.$$

Application numérique :

$$m_1 = 2{,}7 \text{ g}.$$

$$v = \frac{3}{2} \times \frac{2{,}7}{27} \times 22\,400. \qquad v = \mathbf{3\,360\ cm^3}.$$

Masse de chlorure d'aluminium formé à partir de m_1 grammes d'aluminium.

Désignons par M_1 cette masse.

D'après l'équation de réaction nous pouvons écrire que le nombre de moles $AlCl_3$, $\frac{M_1}{133{,}5}$, est égal au nombre de moles Al.

$$\frac{M_1}{133{,}5} = \frac{m_1}{27}.$$

Nous en tirons

$$M_1 = 133{,}5 \times \frac{m_1}{27}.$$

Numériquement : $m_1 = 2{,}7$ g.

$$M_1 = 133{,}5 \times \frac{2{,}7}{27}. \qquad \mathbf{M_1 = 13{,}35\ g.}$$

115. — Réduction par l'hydrogène d'un mélange d'oxydes ferreux et ferrique.

9,6 g d'un mélange d'oxyde ferreux et d'oxyde ferrique ont été réduits à l'état de fer par l'hydrogène ; la masse d'eau obtenue est 2,88 g.

1° Quelle est la composition du mélange de ces deux oxydes ?
2° Quelle est la masse d'hydrogène nécessaire pour la réduction ?
3° Quel est son volume mesuré à 17 °C sous 725 mm de mercure?

$$H = 1, \quad O = 16, \quad Fe = 56.$$

(Besançon.)

1° Désignons par x g la masse d'oxyde ferreux FeO et par y g la masse d'oxyde ferrique Fe_2O_3 contenues dans une masse m g de mélange.

Nous avons une première relation

$$x + y = m. \tag{1}$$

La réduction des oxydes de fer par l'hydrogène, donnant du fer et de l'eau, est traduite par les deux équations de réaction :

$$FeO + H_2 \longrightarrow Fe + H_2O,$$

et

$$Fe_2O_3 + 3H_2 \longrightarrow 2Fe + 3H_2O.$$

Les masses molaires étant $56 + 16 = 72$ pour FeO et $2 \times 56 + 3 \times 16 = 160$ pour Fe_2O_3 la masse m de mélange contient $\frac{x}{72}$ mole FeO et $\frac{y}{160}$ mole Fe_2O_3.

D'après les équations de réaction, le nombre total de moles H_2O est le même que celui de moles FeO, soit $\frac{x}{72}$, augmenté de 3 fois le nombre de moles Fe_2O_3, soit $3 \times \frac{y}{160}$. Ce nombre total de moles représente une masse totale d'eau m' g, telle que

$$\left(\frac{x}{72} + \frac{3y}{160}\right) 18 = m'.$$

Cette relation fournit la deuxième équation du problème :

$$20x + 27y = 80m'. \tag{2}$$

m et m' étant connus, le système d'équation (1) et (2) permet de calculer x et y.

Application numérique : $m = 9{,}6$ g, $m' = 2{,}88$ g.

Le système d'équations (1) et (2) s'écrit

$$x + y = 9{,}6,$$
$$20x + 27y = 80 \times 2{,}88.$$

Nous en tirons

$$x = \mathbf{4{,}11\ g} \quad \text{et} \quad y = \mathbf{5{,}49\ g.}$$

2° Désignons par z la masse d'hydrogène nécessaire à la réduction du mélange d'oxydes. D'après les équations de réaction le nombre $\frac{z}{2}$ de moles H_2 est le même que le nombre, $\frac{m'}{18}$, de moles H_2O :

$$\frac{z}{2} = \frac{m'}{18},$$

d'où

$$z = \frac{2 \times m'}{18} = \frac{m'}{9}.$$

Application numérique :

$$z = \frac{2{,}88}{9}, \qquad z = \mathbf{0{,}32\ g.}$$

3° Le volume v d'hydrogène, mesuré à t °C sous h mm de mercure et dont la masse est z g, s'obtient à partir du volume v_0, mesuré dans les conditions normales (0 °C, 760 mm de mercure) de la même masse de gaz.

Le volume molaire d'un gaz dans les conditions normales étant égal à 22 400 cm^3, z g H_2 contiennent $\frac{z}{2}$ moles H_2 et occupent dans les conditions normales le volume $v_0 = \frac{z}{2} \times 22\,400$ cm^3.

Appliquons à ce gaz la formule des gaz parfaits. Nous avons

$$\frac{v \times h}{1 + \alpha t} = v_0 \times 760,$$

d'où

$$v = v_0 \times \frac{760}{h} \times (1 + \alpha t) = \frac{z}{2} \times 22\,400 \times \frac{760}{h} \times (1 + \alpha t).$$

Application numérique :

$z = 0{,}32$ g ; $h = 725$ mm de mercure ; $t = 17$ °C.

$$v = \frac{0{,}32}{2} \times 22\,400 \times \frac{760}{725} \times \left(1 + \frac{17}{273}\right),$$

$$v = 0{,}16 \times 22\,400 \times \frac{760}{725} \times \frac{290}{273}.$$

$$v = 3\,991 \approx 3\,990.$$

Le volume v d'hydrogène cherché est

$$\mathbf{v = 3\,990\ cm^3.}$$

Autre solution des 1° et 2°.

Désignons par x et y les nombres de moles d'oxyde ferreux et d'oxyde ferrique contenues dans m g du mélange d'oxydes et z la masse d'hydrogène nécessaire à la réduction.

L'équation de réduction s'écrit

$$\underbrace{x\,FeO + y\,Fe_2O_3}_{m} + \underbrace{(x+3y)\,H_2}_{z} \rightarrow \underbrace{(x+3y)\,H_2O}_{m'} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(x+2y)\,Fe}.$$

La masse d'eau obtenue étant m' g, les moles FeO, Fe_2O_3, H_2O valant respectivement 72 g, 160 g et 18 g, nous pouvons écrire ainsi les deux équations du problème

$$\begin{cases} x \times 72 + y \times 160 = m, \\ (x + 3y)\ 18 = m'. \end{cases}$$

Elles admettent pour solution $x = \dfrac{0{,}4}{7}$ et $y = \dfrac{0{,}24}{7}$.

Les masses d'oxydes correspondants sont alors

$$x \times 72 = \frac{0{,}4}{7} \times 72 = 4{,}114 \text{ g FeO},$$

$$y \times 160 = \frac{0{,}24}{7} \times 160 = 5{,}486 \text{ g } Fe_2O_3$$

La masse d'hydrogène nécessaire à la réduction est

$$z = (x + 3y)2 = \left(\frac{0{,}4}{7} + \frac{3 \times 0{,}24}{7}\right) 2 = 0{,}32 \text{ g}.$$

116. — Réduction d'un oxyde de fer par l'oxyde de carbone.

On réduit en poudre 16 g d'un oxyde de fer pur. Cette poudre est chauffée dans un tube parcouru par un courant d'oxyde de carbone. La réaction terminée et complète, on constate que la masse du tube a diminué de 4,8 g.

1° En déduire quel est parmi les oxydes de fer que vous connaissez celui qui a été employé.

2° Le gaz sortant du tube est envoyé dans un flacon laveur contenant une solution de soude. Quelle sera la variation de masse de ce flacon laveur ?

3° Quel volume minimal d'oxyde de carbone, mesuré dans les conditions normales de température et de pression, faut-il faire passer dans le tube chauffé pour que la réaction soit complète ?

Fe = 56, O = 16, C = 12.

(Madagascar.)

1° L'oxyde de carbone, par réaction sur un oxyde de fer fournit du gaz carbonique et du fer. Si la réaction est complète la totalité de l'oxygène de l'oxyde de fer a été éliminée.

Désignons par m la masse initiale d'oxyde et par m' la diminution de masse du tube, c'est-à-dire la masse d'oxygène contenu dans l'oxyde.

Écrivons d'autre part la formule de l'oxyde $Fe_\alpha O_\beta$, α et β étant les nombres d'atomes de fer et d'oxygène qu'il s'agit de déterminer.

Il est bien évident que la masse d'oxygène contenu dans un gramme de substance doit être la même qu'on la calcule à partir des données théoriques (formule) ou des données expérimentales.

Une mole $Fe_\alpha O_\beta$ vaut $\alpha \times 56 + \beta \times 16$ g et contient $\beta \times 16$ g d'oxygène. Pour 1 g de substance nous avons donc $\frac{\beta \times 16}{\alpha \times 56 + \beta \times 16}$ g d'oxygène d'après la formule et $\frac{m'}{m}$ g d'oxygène d'après l'expérience.

Nous pouvons écrire l'égalité :

$$\frac{\beta \times 16}{\alpha \times 56 + \beta \times 16} = \frac{m'}{m}.$$

Cette relation peut encore s'écrire

$$\frac{\alpha \times 56}{\beta \times 16} = \frac{m - m'}{m'}.$$

Cette relation entre α et β est la seule que nous connaissions.

Nous ne pouvons donc avoir que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ mais la connaissance de ce rapport suffit pour pouvoir faire un choix entre plusieurs formules correspondant à des compositions différentes.

Application numérique :

$$m = 16 \text{ g}, \qquad m' = 4{,}8 \text{ g}.$$

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{56}{16} = \frac{16 - 4{,}8}{4{,}8},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{16}{56} \times \frac{11{,}2}{4{,}8},$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}.$$

Les nombres d'atomes de fer et d'oxygène sont dans le rapport de 2 à 3. La formule de l'oxyde étudié est donc

$$(Fe_2O_3)_n.$$

Or nous connaissons trois oxydes de fer :

FeO oxyde ferreux,
Fe_2O_3 oxyde ferrique,
Fe_3O_4 oxyde magnétique.

Il s'agit donc ici de l'oxyde ferrique Fe_2O_3, le seul dans lequel le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ a la valeur $\frac{2}{3}$.

2° Le gaz carbonique provenant de la réduction de l'oxyde ferrique au contact de soude concentrée donne du carbonate disodique et de l'eau suivant la réaction

$$CO_2 + 2\,NaOH \rightarrow Na_2CO_3 + H_2O.$$

La variation de masse du flacon laveur est égale à la masse de gaz carbonique formé. Soit x cette masse obtenue à partir de m' g d'oxygène.

$$CO + \frac{1}{2}O_2 \rightarrow CO_2. \qquad (1)$$

L'équation de réaction montre que le nombre de moles CO_2 est égal à deux fois le nombre de moles O_2. Les moles CO_2 et O_2 ayant respectivement pour masse 44 g et 32 g, nous avons

$$\frac{x}{44} = 2 \times \frac{m'}{32};$$

équation qui donne x :

$$x = 44 \times 2 \times \frac{m'}{32}.$$

Application numérique :

$$m' = 4{,}8 \text{ g.}$$

$$x = 44 \times 2 \times \frac{4{,}8}{32}, \qquad x = \mathbf{13{,}2\ g.}$$

3° Le volume minimal v litres d'oxyde de carbone, mesuré dans les conditions normales de température et de pression, nécessaire pour que la réaction soit complète, c'est-à-dire pour se combiner à m' g d'oxygène est encore donné par l'équation de réaction (1).

D'après cette équation, le nombre de moles CO est égal à deux fois le nombre de moles O_2.

La mole CO dans les conditions normales de température et de pression occupant le volume connu V litres, v litres contiennent $\frac{v}{V}$ moles.

Nous avons donc $\frac{v}{V} = 2 \times \frac{m'}{32}$,

équation qui donne v :

$$v = V \times 2 \times \frac{m'}{32}.$$

Application numérique :

$$V = 22{,}4 \text{ litres}, \quad m' = 4{,}8 \text{ g}.$$

$$v = 22{,}4 \times 2 \times \frac{4{,}8}{32},$$

$$v = \mathbf{6{,}72 \text{ litres}}.$$

Remarque. — Nous aurions pu raisonner à partir de l'équation de réaction

$$3\,CO + Fe_2O_3 \rightarrow 3\,CO_2 + 2Fe.$$

Nous aurions obtenu pour masse de CO_2 et volume de CO les mêmes nombres que ceux qui ont été trouvés.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — **Réflexion de la lumière. Miroirs plans.**

1. Miroir plan : image virtuelle d'un objet réel..... 9
2. Miroir plan : image réelle d'un objet virtuel. Miroir plan tournant.. 11
3. Miroirs plans inclinés l'un sur l'autre..... 13
4. Système de miroirs angulaires tournant autour d'un axe..... 15

CHAPITRE II. — **Réfraction de la lumière.**

5. Application de la construction d'Huygens..... 18
6. Mesure d'un indice. Principe de l'appareil Pullfrich..... 21
7. Détermination de la profondeur d'un étang (application des lois de la réfraction et de la réflexion)..... 24

CHAPITRE III. — **Dioptre plan. Lame à faces parallèles.**

8. Etude de la réfraction d'un rayon lumineux à travers une glace à faces parallèles argentée sur une face..... 28
9. Etude d'un prisme à réflexion totale..... 31
10. Lame à faces parallèles argentée : image d'un segment de droite non parallèle à la lame..... 36
11. Calcul du déplacement latéral d'un pinceau lumineux cylindrique traversant une lame à faces parallèles..... 41

CHAPITRE IV. — **Prisme.**

12. Construction de la courbe de variation de la déviation d'un rayon à travers un prisme en fonction de l'incidence..... 44
13. Déviation d'un faisceau lumineux à travers un prisme et un système de deux prismes accolés..... 49
14. Étude d'un prisme de petit angle dont l'une des faces est argentée.. 54

CHAPITRE V. — **Lentilles. Construction géométrique des images. Formules de Descartes.**

15. Image réelle d'un objet réel donné par une lentille convergente.... 60
16. Détermination de la distance focale d'une lentille donnant d'un objet (réel ou virtuel) une image de grandeur donnée..... 64
17. Système composé de deux lentilles convergentes de même distance focale f distantes l'une de l'autre de f 67

18. Système de deux lentilles convergentes de même axe 70
19. Principe du téléobjectif..... 73
20. Système composé d'une lentille divergente et d'une lentille convergente de même axe, dont la distance est variable..... 77

CHAPITRE VI. — **Convergence d'une lentille. Théorème des convergences. Interposition d'un milieu transparent.**

21. Système de deux lentilles accolées et liquide intermédiaire..... 83
22. Lentille complètement immergée dans un liquide..... 85
23. Lentille et dioptre plan..... 87
24. Lentille ayant sa face antérieure en contact avec un liquide..... 89
25. Lentille et prismes de petit angle accolés..... 94
26. Lentille et lame à faces parallèles..... 96

CHAPITRE VII. — **Lentilles et miroir.**

27. Lentille convergente et miroir plan situé dans son plan focal image.. 101
28. Système de deux lentilles convergentes et miroir plan..... 105

CHAPITRE VIII. — **Appareil photographique.**

29. Appareil photographique : image d'une personne en mouvement.. 109
30. Appareil photographique : profondeur de champ. Emploi d'une bonnette 112

CHAPITRE IX. — **Œil. Correction des anomalies de la vision.**

31. Œil : correction de la myopie..... 116
32. Œil : correction de la presbytie 119
33. Œil : correction de la vue d'un myope devenu presbyte..... 121

CHAPITRE X. — **Loupe. Oculaires.**

34. Loupe : puissance, grossissement, latitude de mise au point (œil normal et œil myope au foyer image)..... 123
35. Loupe : puissance, grossissement, grandissement (œil normal hors du foyer image)..... 128
36. Loupe : champ en largeur..... 133
37. Oculaire positif de Ramsden..... 137
38. Oculaire négatif d'Huygens 139

CHAPITRE XI. — **Microscope.**

39. Microscope. Puissance, grossissement, latitude de mise au point.. 144
40. Microscope. Mesure de la puissance au moyen de la chambre claire. Pouvoir séparateur..... 149
41. Microscope. Grossissement. Calcul du pas de la vis micrométrique. Mesure de l'indice d'une lame de verre 152
42. Microscope. Mesure de la puissance et du grossissement au moyen de l'oculaire micrométrique 156

43. Microscope. Latitude de mise au point, puissance et grossissement pour un œil myope. Microphotographie 158

CHAPITRE XII. — Lunette astronomique.

44. Lunette astronomique. Grossissement. Emploi du micromètre oculaire 165
45. Lunette astronomique. Mesure du grossissement par le procédé de la mire. Etude des images du Soleil..... 168
46. Lunette astronomique. Grossissement et pouvoir séparateur (utilisation par un œil normal et un œil myope)..... 172
47. Lunette astronomique transformée en lunette terrestre. Grossissements comparés 176

CHAPITRE XIII. — Dispersion de la lumière. Spectroscope.

48. Spectroscope à prisme : déviation des rayons correspondant à deux radiations 180
49. Spectroscope à prisme : marche des rayons, diamètre apparent du spectre obtenu en lumière blanche..... 183
50. Spectroscope à prisme : étude de l'image réelle d'un spectre..... 188

CHAPITRE XIV. — Loi d'Ohm pour des résistances mortes. Loi de Joule. Énergie électrique.

51. Résistance électrique. Loi d'Ohm. Coefficient de température.... 192
52. Loi de Joule : étude d'une bouilloire électrique..... 196
53. Loi de Joule : étude d'un fusible..... 199
54. Energie électrique : étude d'un fer à repasser sous tension variable.. 203
55. Energie électrique : rendement d'une ligne de transport de courant. 207
56. Transformation de l'énergie électrique en chaleur. Application à l'étude de la résistivité d'un métal..... 209

CHAPITRE XV. — Électrolyse. Lois de Faraday. Loi d'Ohm pour les voltamètres.

57. Electrolyse de solutions de sels métalliques. Application des lois quantitatives de Faraday (1er énoncé) 214
58. Électrolyse de solutions de sels métalliques. Application des lois quantitatives de Faraday (2e énoncé) 216
59. Etude d'un voltamètre contenant une solution de sulfate de soude. Loi d'Ohm pour ce voltamètre..... 219
60. Préparation industrielle de l'oxygène et de l'hydrogène par électrolyse d'une solution de soude. Rendement de cette préparation.. 222
61. Préparation de l'aluminium par électrolyse. Energie mise en jeu sous ses diverses formes..... 226

CHAPITRE XVI. — Loi d'Ohm pour les moteurs.

62. Expression des caractéristiques d'un moteur en fonction de la vitesse du rotor 230

63. Étude d'un moteur dont le rotor est successivement bloqué, puis libre 233
64. Étude d'une installation de pompage 236
65. Force contre-électromotrice d'un moteur et différence de potentiel à ses bornes 240
66. Loi d'Ohm pour une portion de circuit renfermant un moteur et des voltamètres en série 243

CHAPITRE XVII. — **Loi de Pouillet.**

67. Circuit comprenant une résistance et un générateur. Quantité de chaleur dégagée dans la résistance. Différence de potentiel aux bornes du générateur 248
68. Étude d'un circuit comprenant un générateur, une résistance et un voltamètre en série 251
69. Étude d'un circuit comprenant des piles en série et en opposition.. 254
70. Étude d'un circuit comprenant deux voltamètres en série 256
71. Circuit comprenant un moteur successivement bloqué, puis tournant 260

CHAPITRE XVIII. — **Courants dérivés. Circuits ne renfermant que des résistances mortes.**

72. Circuit comprenant trois résistances en dérivation entre deux points. 263
73. Intensité du courant dans un « pont » reliant deux dérivations, pour une position quelconque de ce pont 265
74. Circuit comprenant *n* lampes identiques placées en dérivation entre deux points 269
75. Lampes de puissances différentes montées en série sous une tension double de leur tension normale 272
76. Circuit fermé résistant avec dérivations 276

CHAPITRE XIX. — **Appareils de mesure. Shunts.**

77. Galvanomètre shunté. Calcul des intensités. Précision 280
78. Graduation d'un ampèremètre par électrolyse. Shuntage de l'appareil 284
79. Ampèremètre à plusieurs sensibilités. Transformation en voltmètre à plusieurs sensibilités 287
80. Transformation d'un voltmètre en ampèremètre. Influence de la température sur l'indication de l'appareil 291
81. Étude d'un voltmètre 294
82. Utilisation d'un voltmètre. Mesure d'une résistance au moyen d'un ampèremètre et d'un voltmètre 299

CHAPITRE XX. — **Courants dérivés. Dérivations comportant des générateurs et des récepteurs.**

83. Dérivations comportant des voltamètres. 303
84. Dérivations comportant des générateurs. 307
85. Dérivation comportant un moteur 311

CHAPITRE XXI. — **Polarisation des voltamètres. Piles et accumulateurs.**

86. Étude de la polarisation d'un voltamètre 315
87. Étude d'une pile Daniell 319
88. Accumulateur. Variation de la force contre-électromotrice au cours de la charge 324
89. Accumulateurs. Rendement en quantité d'électricité et en énergie.. 327
90. Groupement des générateurs 329

CHAPITRE XXII. — **Champ magnétique d'un aimant et d'un courant.**

91. Forces exercées par les pôles d'une aiguille aimantée sur les pôles d'une autre aiguille identique 335
92. Champ magnétique d'un aimant 338
93. Champ magnétique d'un courant rectiligne 343
94. Étude d'une boussole des tangentes 346
95. Champ magnétique d'un solénoïde. Action sur une aiguille aimantée 350
96. Action sur une aiguille aimantée d'un solénoïde mobile autour d'un axe vertical 353
97. Étude d'un circuit comportant un voltamètre et un solénoïde en série 356

CHAPITRE XXIII. — **Action d'une induction magnétique sur un courant.**

98. Action d'une induction magnétique sur un élément de courant mobile : travail électromagnétique pendant le déplacement de cet élément 360
99. Action d'une induction magnétique de direction variable sur un courant rectiligne 363
100. Action d'une induction magnétique d'un solénoïde sur un circuit fermé ..... 369.
101. Comparaison de la sensibilité d'un galvanomètre à champ uniforme et d'un galvanomètre à champ radial 372
102. Étude d'un galvanomètre à cadre mobile 377
103. Milliampèremètre à cadre mobile : transformation en voltmètre et en ampèremètre 382

CHAPITRE XXIV. — **Induction électromagnétique.**

104. Induction électromagnétique dans la bobine d'un électro-aimant. 387
105. Etude des phénomènes d'induction dans un circuit fermé : quantité d'électricité induite 392
106. F.é.m. induite dans un cadre se déplaçant d'un mouvement uniforme dans le champ magnétique d'un électro-aimant. Force s'opposant au déplacement 395
107. Induction électromagnétique produite par le déplacement d'un élément de courant 398
108. Courant d'induction dans un circuit de surface variable 403

CHAPITRE XXV. — **Problèmes de chimie.**

109. Volume d'acide sulfurique nécessaire pour obtenir 1 kg de sulfate de cuivre 409
110. Dosage volumétrique d'une solution d'acide chlorhydrique. Action de cette solution sur l'aluminium et le bioxyde de manganèse. 410
111. Dosage volumétrique et pondéral d'une solution d'acide sulfurique. 414
112. Action d'un mélange d'acides étendus sur du fer en excès. Réduction d'un oxyde de cuivre par l'hydrogène dégagé dans cette réaction 417
113. Étude du traitement d'une blende 419
114. Composition d'une alumine hydratée. Action de l'acide chlorhydrique sur l'aluminium 422
115. Réduction par l'hydrogène d'un mélange d'oxydes ferreux et ferrique 424
116. Réduction d'un oxyde de fer par l'oxyde de carbone 427

Imprimerie Hérissey, Évreux N° 3422.
Dépôt légal, n° 2680, 2e trim. 1966.

L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

Fondé en 1898.

Journal 22/28 cm, avec figures dans le texte, paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet, rédigé par MM. BENOIT, CAHEN, COMBES, COMMÉNY, EYMARD et MENOT.

Prix de l'abonnement annuel : France, Algérie, Maroc, Tunisie et Communauté : **15,00** F. Étranger : **16,00** F.

(A quelque époque de l'année que l'on s'abonne on reçoit tous les numéros parus depuis le 1er octobre.)

Numéro spécimen sur demande.

Ce journal, publié depuis 1898, a été créé pour les débutants qui ne peuvent pas encore suivre le *Journal de Mathématiques élémentaires;* il s'adresse aux élèves des lycées de garçons et de jeunes filles depuis les classes de Quatrième jusqu'à celles de Première et de Philosophie — aux élèves des C.E.G. et des écoles normales; — aux aspirants et aspirantes au brevet d'études du premier cycle et au brevet élémentaire; — aux candidats aux écoles normales primaires, professionnelles, de commerce, etc., — aux nombreux jeunes gens qui, n'ayant pas fait d'études régulières ou n'ayant pu les poursuivre assez loin, désirent compléter leur instruction et ont besoin d'être guidés. Il intéresse enfin beaucoup de pères de famille qui prennent une part active aux études de leurs enfants.

Des *questions proposées* sont livrées aux recherches des abonnés. Les solutions insérées dans le journal sont rédigées avec les plus grands détails, de manière à ne laisser dans l'ombre aucune partie de la démonstration, et en rappelant les théorèmes à l'appui. Les fautes qui se trouvent dans les solutions envoyées sont signalées et expliquées d'une façon générale, sans indication de personnalité, de manière à faire profiter tous les lecteurs des enseignements qui peuvent se dégager des erreurs de quelques-uns.

Signalons enfin que des concours dotés de prix en espèces ont été institués depuis 1946 et que les résultats, extrêmement encourageants, ont montré l'intérêt qu'y portaient un grand nombre d'abonnés.

VUIBERT 63, Bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS, Ve

TABLES DE CALCUL NUMÉRIQUE

Puissances. Logarithmes décimaux.
Logarithmes népériens. Exponentielles.
Fonctions circulaires. Fonctions hyperboliques.

Par A. HENNEQUIN. — Vol. 16 × 24 cm ..... **8,00 F**

Ces *Tables* sont *autorisées officiellement* à l'examen du Baccalauréat (*Circulaire du 14 février* 1963). Autorisées également à tous les concours des grandes écoles, elles servent ensuite aux élèves de Mathématiques spéciales et de Mathématiques supérieures et aux étudiants de Propédeutique.

LA COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT

SÉRIE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Exercices et Problèmes résolus, Méthodes de recherche, Conseils, Commentaires.

Par MM. A. COMBES, professeur au lycée Voltaire, à Paris, et A. BENOIT, professeur au lycée Condorcet, à Paris. — Vol. 14/22 cm, de 240 pages (64 exercices et 26 problèmes), 2e édition..... **12 F**

Les candidats trouveront dans cet ouvrage une collection d'exercices et de problèmes conformes au nouveau programme et aux modalités actuelles de l'examen.

Ces exercices, classés par catégorie, couvrent la totalité du programme. Leur solution est accompagnée, éventuellement, de commentaires et de conseils.

Il en est de même de la collection de problèmes que l'on trouvera à la suite.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Par M. A. COMBES, professeur au lycée Voltaire, à Paris. — Vol. 14/22 cm, de 160 pages. 2e édition..... **5,60 F**

Cet ouvrage est, certes, un recueil de formules, mais c'est aussi, en raison de sa conception, un véritable résumé du cours.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

Fondé en 1876.

Journal 22/28 cm paraissant le 1er et le 15 de chaque mois, du 1er octobre au 15 juillet, fondé par H. Vuibert, et publié par MM. BENOIT, COMBES, EYMARD, MAREC et MENOT.

Prix de l'abonnement annuel : France, Algérie, Maroc, Tunisie et Communauté : 15,00 F. Étranger : 16,00 F.

(A quelque époque de l'année que l'on s'abonne, on reçoit tous les numéros parus depuis le 1er octobre.)

Numéro spécimen sur demande.

Chaque numéro contient des problèmes proposés (de mathématiques et de sciences physiques) livrés aux recherches des lecteurs et provenant soit d'examens [séries A', C, M, M', T et T', séries Mathématiques élémentaires, Mathématiques et technique, Sciences expérimentales du Baccalauréat (1)], soit de concours d'entrée à certaines grandes écoles, soit également d'abonnés eux-mêmes qui veulent bien proposer des sujets.

Le **Journal** publie également les sujets et les solutions des problèmes de mathématiques et de physique du Concours général.

Tout abonné peut nous envoyer régulièrement une solution de chacun des problèmes proposés. Celle-ci est examinée avec soin ; elle n'est pas retournée à l'abonné, mais son nom, si sa solution est correcte, est signalé à la suite de la **solution-type** que nous publions quelques semaines plus tard.

Signalons enfin que des prix en espèces (concours inter-abonnés, tableau d'honneur des abonnés) sont décernés en cours ou en fin d'année scolaire.

Les jeunes gens qui trouveraient le **Journal de Mathématiques élémentaires** d'un niveau trop élevé recevront, sur simple demande, un numéro spécimen de **L'Education Mathématique** (1).

(1) Les sujets de la série Philosophie, ceux des séries classiques A et B sont traités dans L'Education Mathématique. Demander à la Librairie Vuibert un numéro spécimen de cette dernière publication.

VUIBERT 63, Bd SAINT-GERMAIN, 63, PARIS, V^e